FAKULTA MECHATRONIKY,
INFORMATIKY A MEZIOBOROVÝCH
STUDIÍ TUL

MATLAB: Numerické a analytické výpočty

Jaroslav Čmejla
Martin Vrátný
Miroslav Holada
ITE FM TUL

jaroslav.cmejla@tul.cz martin.vratny@tul.cz miroslav.holada@tul.cz

Část 1

Numerické vyhodnocování výrazů

Numerický výpočet sum

- Suma - zkrácený zápis součtu

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- Numerický výpočet provádíme v Matlabu vektorizací výrazu a příkazem `sum`
- Příklad: pro $x = 5$ a $n = 10$ vypočtěte sumu

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{x^i}{i^2}$$

```
>> sum((-5).^(1:10)./(1:10).^2)
ans =
  7.8388e+004
```

Numerický výpočet produktů

- Produkt - zkrácený zápis součinu

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n$$

- Numerický výpočet provádíme v Matlabu vektorizací výrazu a příkazem `prod`
- Příklad: pro $x = 1.4$ a $n = 8$ vypočtěte produkt

$$\prod_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi x}{i}\right)$$

```
>> prod(sin(pi*1.4./(1:8)))
ans =
   -0.1080
```

Numerický výpočet integrálu

- Numerický výpočet integrálu je pouze přibližný

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_i f(x_i)\Delta x$$

- Aproximace integrálu: např. obdélníková metoda

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + (i + \frac{1}{2})\Delta x\right)\Delta x \qquad N = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Numerický výpočet integrálu

- Příklad:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

```
>> krok=0.01;
>> rozdeleni=0:krok:1-krok;
>> sum(1./(1+(rozdeleni+krok/2).^2)*krok)

ans =

    0.7854
```

Lineární algebra: soustava lineárních rovnic

- Příklad soustavy pro 3 neznámé s parametrem α

$$
\begin{aligned}
3\xi_1 + 9\xi_2 - 7\xi_3 &= 9 \\
3\xi_1 + \alpha^2\xi_2 - 7\xi_3 &= 6 \\
\alpha\xi_1 + 9\xi_2 - 7\xi_3 &= 1
\end{aligned}
$$

- Řešení pro $\alpha = 4$

```
>> A=[3 9 -7; 3 16 -7; 4 9 -7];
>> b=[9 6 1]';
>> inv(A)*b % též A\b
```

Lineární algebra: soustava lineárních rovnic

- Pro $\alpha = 3$ řešení evidentně neexistuje

```
>> A=[3 9 -7; 3 9 -7; 3 9 -7];
>> A\b

Warning: Matrix is singular to working precision.

ans =

   NaN
   NaN
  -Inf
```

Lineární algebra: vlastní čísla a vektory (1)

- Je-li λ vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x}$ je příslušný vlastní vektor, pak

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

  takže $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je singulární, tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

- Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & -9 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vektory

```
>> [V D]=eig(A);
```

Lineární algebra: vlastní čísla a vektory (2)

- Jelikož $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$, musí platit, že $\mathbf{AV} = \mathbf{VD}$.
- Součin vlastních čísel je roven determinantu $\mathbf{A}$. Ověření:

```
>> det(A)
ans =

   293
>> prod(diag(D))
ans =

  293.0000
```

- Ověření singularity $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$

```
>> det(A-D(1,1)*eye(3))
ans =

 -2.6114e-013
```

Polynomy

- Příkaz `poly` vrací koeficienty polynomu se zvolenými kořeny.
- Příklad:

```
>> poly([2 3 4])

ans =
     1    -9    26   -24
```

znamená, že polynom $p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ má kořeny 2, 3 a 4.

- Kořeny polynomu

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

spočteme numericky pomocí příkazu `roots`.

Polynomy

- Příklad $p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

```
>> roots([1 -9 26 -24])

ans =

    4.0000
    3.0000
    2.0000
```

Část 2

Symbolické výpočty v Matlabu

Symbolické výpočty v Matlabu

- Potřebujeme Symbolic Math Toolbox
- Založeno na jádru (engine) MuPAD (původně Maple)
- Ovládat lze skrze konzoli Matlabu (přímá konzole MuPADu byla odebrána v R2023b)
- Pozor na změny (některé významné) přicházející s novými verzemi Matlabu

Symbolické proměnné

- Příkazem `syms` vytvoříme proměnnou typu `sym`

```
>> syms x y
```

- S proměnnými pracujeme "normálně", Matlab posílá příkazy automaticky na MuPAD a vypisuje výsledek
- Např.

```
>> (x+y)*(x+y)+x-1
```

se ve skutečnosti zpracuje v MuPADu.

- Předpoklady o proměnné např.

```
>> syms x real
>> syms y positive
```

Symbolická čísla

- Je třeba chápat rozdíl mezi tím, kdy je výraz chápán jako numerický a kdy jako symbolický. Není to úplně jednoznačné, protože existují vyjímky.
- Např. vytvoření symbolického čísla 2

```
>> a=str2sym('2') % jelikož je parametr řetězec, není nutný
                 % převod numerické hodnoty na symbolickou
>> a=sym(2)     % zde k převodu teoreticky dochází, protože
                % výraz v závorce je numerická dvojka (double)
                % ve skutečnosti je to ale vyjímka
```

- Sledujte rozdíly

```
>> str2sym('sqrt(2)')
>> sym(sqrt(2))
>> sym(2^(1/2))
>> sym(2^(1/3)) % nevznikne symbolická třetí odmocnina ze 2
>> sym(str2sym('2^(1/3)')) % takto ano
```

Zlomky

- Pro symbolické počítání zlomků stačí, aby jedna z proměnných byla typu `sym`. Např

```
>> sym(3)/5+12/15
ans =

7/5
```

- Pomocí příkazu `sym` lze převádět numerický formát na racionální (symbolické) číslo

```
>> sym(log10(5),'r')
ans =

2459282071491/3518437208832
```

Převod symbolické veličiny na numerickou

- Příkaz `vpa` (Variable Precision Arithmetic)

```
>> vpa(str2sym('sin(sqrt(2))'),40)

ans =

0.9877659459927355270691340720789426559068
```

- Pozor na rozdíl:

```
>> vpa(sin(sqrt(2)),40)

ans =

0.9877659459927355944941496090905275195837
```

- Příkazem `digits` nastavujeme standardní přesnost

```
>> digits(20)
```

Matice a vektory

- Deklarujeme stejně jako normální matice a vektory

```
>> A=[1 2 3; 4 x 5;-7 8 x]
A =

[  1, 2, 3]
[  4, x, 5]
[ -7, 8, x]
```

- Používáme standardní operace a příkazy, Matlab volá MuPAD. Např.

```
>> det(A)
ans =

x^2 + 13*x - 14
```

Substituce

- Dosazování a substituce pomocí příkazu `subs`

```
>> f=x^4+sin(x)
f =
sin(x) + x^4

>> subs(f,x,2)
ans =
   16.9093

>> subs(f,x,'2')
ans =
sin(2) + 16

>> subs(f,x,x^4)
ans =
sin(x^4) + x^16
```

Symbolické funkce (jedna proměnná)

- Definice funkcí se symbolickou vstupní proměnnou `symfun`

formalní definice:

```
>> f = symfun(x^4+sin(x),[x])
f(x) =
sin(x) + x^4

>> f(2) % vyhodnocení v bodě
ans =
sin(2) + 16
```

zkrácená definice:

```
>> f(x) = x^4+sin(x)
f(x) =
sin(x) + x^4

>> f(2) % vyhodnocení v bodě
ans =
sin(2) + 16
```

Symbolické funkce (více proměnných)

- Definice funkcí se symbolickými vstupními proměnnými `symfun`

formalní definice:

```
>> f = symfun(x^4 + y^3,[x, y])
f(x, y) =
x^4 + y^3

>> f(2,1) % vyhodnocení v bodě
ans =
17
```

zkrácená definice:

```
>> f(x, y) = x^4 + y^3
f(x, y) =
 x^4 + y^3

>> f(2,1) % vyhodnocení v bodě
ans =
17
```

Zjednodušování výrazů

- Multifunkční příkaz `simplify`

```
>> (x-1)*(x+1)
ans =
(x - 1)*(x + 1)

>> simplify((x-1)*(x+1))
ans =
x^2 - 1
```

- Příkazy `expand`, `factor`, `collect`, ...
- Příkaz `pretty` dává formátovaný textový výpis výrazu

```
>> pretty((x-1)/(x+1))

  x - 1
  -----
  x + 1
```

Derivace

- Derivujeme pomocí příkazu `diff`
- Např. první parciální derivace podle `x`

$$\frac{\partial}{\partial x}(y + x^4 + \sin x) = \cos x + 4x^3$$

```
>> f=y+x^4+sin(x);
>> diff(f,x)
ans =

cos(x) + 4*x^3
```

- Vyšší derivace

```
>> diff(f,x,2) % druhá parc. derivace podle x
ans =

12*x^2 - sin(x)
```

Integrály

- Integrujeme pomocí příkazu `int`
- Např. neurčitý integrál podle x

$$\int (y + x^4 + sin(x))\, dx$$

```
>> f=y+x^4+sin(x);
>> int(f,x)

ans =

x*y - cos(x) + x^5/5
```

Integrály

- Určitý integrál

$$\int_0^{\pi} \left(y + x^4 + sin(x)\right) dx$$

```
>> int(f,x,0,pi)

ans =

pi*y + pi^5/5 + 2
```

Limity

- Limity počítá příkaz `limit`
- Např.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

```
>> limit(sin(x)/x,x,0)
ans =

1
```

- Limita v nekonečnu

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

```
>> limit(sin(x)/x,x,+inf)
ans =

0
```

Limity

- Limity zleva nebo zprava

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{x}{|x|}$$

```
>> limit(y/abs(y),y,0,'left')

ans =

-1

>> limit(y/abs(y),y,0,'right')

ans =

1
```

Limity

- Pokud limita neexistuje, výsledek je NaN.

```
>> limit(x/abs(x),x,0)

ans =

NaN
```

Řešení algebraických rovnic - příkaz `solve`

- Příklad řešení rovnice $x^2 - 1 = 0$

```
>> solve(x^2-1) % pravá strana je 0 -> nemusí se psát solve(x^2-1==0)
ans =
 -1
  1
```

- Příklad řešení rovnice $x^2 - 1 = x$

```
>> solve(x^2-1==x) % pravá strana je x
ans =
 1/2 - 5^(1/2)/2
 5^(1/2)/2 + 1/2

>> solve(x^2-1-x) % alternativně převedením pravé strany
>> solve(str2sym('x^2-1=x')) % alternativně použitím str2sym
>> solve(x^2-1=x) % špatně - syntakticky nedává smysl
```

Řešení algebraických rovnic - příkaz `solve`

- Řešení $ax^2 - 1 = x$ v proměnné a

```
>> solve(a*x^2-1==x,a)
ans =
(x + 1)/x^2
```

Řešení soustav algebraických rovnic - příkaz `solve`

- Příklad řešení soustavy

$$
\begin{aligned}
x^2 + xy + y &= 3 \\
x^2 - 4x + 3 &= 0
\end{aligned}
$$

```
>> [x,y] = solve(x^2+x*y+y==3,x^2-4*x+3==0)
x =
 1
 3
y =
    1
 -3/2

>> [x,y] = solve([x^2+x*y+y==3;x^2-4*x+3==0]) % rovnice uložené do vektoru
>> [x,y] = solve(str2sym('x^2+x*y+y=3'),...
                 str2sym('x^2-4*x+3=0')) % alternativně s použitím str2sym
```

Analytický výpočet sumy - příkaz `symsum`

- Příklad: součet aritmetické posloupnosti

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

```
>> symsum(k,1,n)

ans =

(n*(n + 1))/2
```

Analytický výpočet sumy - příkaz `symsum`

- Příklad: součet geometrické posloupnosti

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \begin{cases} n & q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-q}{q-1} & q \neq 1 \end{cases}$$

```
>> symsum(q^k,k,1,n)

 ans =

piecewise([q = 1, n], [q <> 1, -(q - q*q^n)/(q - 1)])
```

Další

- Řešení diferenciálních rovnic: `dsolve`
- Taylorovy rozvoje: `taylor`
- Automatický graf funkce: `fplot`
- Fourierova, Laplaceova a Z-transformace: `fourier`, `laplace`, `ztrans`
- Speciální funkce: `Beta`, `erf`, `GAMMA`, `Psi`, ...
- Export symbolických výrazů do programovacích jazyků nebo LaTeXu

Část 3

Příklady na analytické a numerické výpočty

Příklad 1

Spočítejte analyticky

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

a numericky pro $n = 50$. Výsledky vzájemně ověřte.

```
>> syms k n
>> symsum(k^2,1,n)
ans =
(n*(2*n + 1)*(n + 1))/6

>> sum((1:50).^2)
ans =
       42925

>> (50*(2*50+1)*(50+1))/6
ans =
       42925
```

Příklad 2

Vypočtěte analyticky charakteristický polynom matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & -9 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

tj. $p(x) = \det(\mathbf{A} - x\mathbf{I})$, nalezněte jeho kořeny pomocí `roots` a porovnejte s vlastními čísly $\mathbf{A}$ vypočtenými příkazem `eig`.

```
>> A=[1 -3 5; -3 -9 -4; 5 -4 2];
>> syms x
>> p=det(A-x*eye(3))
p =
- x^3 - 6*x^2 + 75*x + 293

>> roots([-1 -6 75 293])
>> eig(A)
```

Příklad 3

Pro které hodnoty α nemá soustava jednoznačné řešení?

$$\begin{aligned}
3\xi_1 + 9\xi_2 + \alpha^2\xi_3 + \xi_4 &= 9 \\
9\xi_1 + \alpha^2\xi_2 - 7\xi_3 - \alpha\xi_4 &= 6 \\
\alpha^2\xi_1 - 7\xi_2 - 7\xi_3 + 8\xi_4 &= 1 \\
\xi_1 - \alpha\xi_2 + 8\xi_3 + \alpha^3\xi_4 &= 1
\end{aligned}$$

```
>> syms a
>> A=[3 9 a^2 1; 9 a^2 -7 -a; a^2 -7 -7 8; 1 -a 8 a^3];
>> det(A)
ans =

-a^9 + a^6 - 147*a^5 + 16*a^4 + 550*a^3 - 164*a^2 + 462*a + 6241

>> roots([-1 0 0 1 -147 +16 +550 -164 462 6241])
>> solve(det(A)) % analytický výsledek
```

Příklad 4

Ověřte, že $\lambda = 2$ je vlastní číslo matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

```
>> A=[5 2 -3; 4 5 -4; 6 4 -4];
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans =
 1
 2
 3

>> eig(A) % nebo numericky
ans =
    1.0000
    2.0000
    3.0000
```

Příklad 5

Spočítejte analyticky

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}(x)\, dx$$

a odhadněte numericky obdélníkovou metodou.

```
>> syms x
>> int(sin(x)^10,0,pi/2)
ans =

(63*pi)/512

>> krok=0.0001;
>> rozdeleni=0:krok:(pi/2-krok);
>> sum(sin(rozdeleni+krok/2).^10*krok)
ans =

    0.3865
```

FAKULTA MECHATRONIKY, INFORMATIKY A MEZIOBOROVÝCH STUDIÍ TUL

Děkuji za pozornost

Jaroslav Čmejla
Martin Vrátný
Miroslav Holada
ITE FM TUL

jaroslav.cmejla@tul.cz martin.vratny@tul.cz miroslav.holada@tul.cz