Primitivní funkce

$$\text{Jestliže platí} \qquad F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b),$$

pak říkáme, že funkce $F(x)$ je **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ v otevřeném intervalu (a,b) (může být i neomezený). Primitivní funkci také nazýváme neurčitým integrálem a značíme ji

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Jednoznačnost neurčitého integrálu

Jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a,b), pak platí

$$G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in (a,b) \qquad \text{zkráceně} \qquad F(x) \overset{c}{=} G(x) \qquad \forall x \in (a,b),$$

kde C je libovolná konstanta. **Tedy dvě primitivní funkce se liší pouze o konstantu.**

Základní vzorce

- $\displaystyle\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{R},\ n \neq -1,\ x \in (0,\infty),$
- $\displaystyle\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \int 1\,dx \overset{c}{=} x, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (-\infty,\infty),$
- $\displaystyle\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z},\ n < -1,\ x \in (0,\infty)$ nebo $x \in (-\infty,0),$
- $\displaystyle\int a^x\,dx \overset{c}{=} \frac{a^x}{\ln a}, \qquad \int e^x\,dx \overset{c}{=} e^x, \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in (-\infty,\infty),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx \overset{c}{=} \ln|x|, \qquad x \in (0,\infty)$ nebo $x \in (-\infty,0),$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx \overset{c}{=} -\cos x, \qquad \int \cos x\,dx \overset{c}{=} \sin x, \qquad x \in (-\infty,\infty),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{tg} x, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z},$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx \overset{c}{=} -\operatorname{cotg} x, \qquad x \in (k\pi,\ (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z},$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{c}{=} \arcsin x \overset{c}{=} -\arccos x, \qquad x \in (-1,1),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x \overset{c}{=} -\operatorname{arccotg} x, \qquad x \in (-\infty,\infty).$

Existence neurčitého integrálu

Jestliže funkce f je spojitá v otevřeném intervalu (a,b), potom pro libovolné číslo c z intervalu (a,b) je funkce

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a,b). **Tedy ke každé spojité funkci v intervalu (a,b) existuje v tomto intervalu primitivní funkce.**

Linearita neurčitého integrálu

Existují-li v intervalu (a,b) neurčité integrály $\displaystyle\int f_1(x)dx, \ldots, \int f_n(x)dx$ a jsou-li $c_1, \ldots, c_n$ libovolná reálná čísla, potom existuje i integrál $\displaystyle\int \big(c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)\big)\,dx$ a platí

$$\int \big(c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)\big)\,dx \stackrel{c}{=} c_1 \int f_1(x)\,dx + \cdots + c_n \int f_n(x)\,dx.$$

Příklad:

$$\int (3\sin x + 2\cos x)\,dx = 3\int \sin x\,dx + 2\int \cos x\,dx \stackrel{c}{=} -3\cos x + 2\sin x \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Integrace per partes

Jestliže funkce u a v mají v intervalu (a,b) spojité derivace, potom v intervalu (a,b) platí

$$\int u(x)v'(x)\,dx \stackrel{c}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Příklad: Spočtěme neurčitý integrál $\int x\sin x\,dx$ pro $x \in (-\infty,\infty)$. Chceme vyderivovat polynom, takže volíme

$$u(x) = x, \qquad v'(x) = \sin x.$$

Potom

$$u'(x) = 1, \qquad v(x) = -\cos x.$$

Dosadíme:

$$\int x\sin x\,dx \stackrel{c}{=} x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx \stackrel{c}{=} -x\cos x + \int \cos x\,dx \stackrel{c}{=} -x\cos x + \sin x.$$

Příklad: Spočtěme neurčitý integrál $\int \ln x\,dx$ pro $x \in (0,\infty)$. Chceme vyderivovat logaritmus (před logaritmus napíšeme krát jedna), takže zvolíme:

$$u(x) = \ln x, \qquad v'(x) = 1.$$

Potom

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \qquad v(x) = x,$$

a dostaneme

$$\int \ln x \, dx \stackrel{c}{=} x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx \stackrel{c}{=} x \ln x - \int 1 \, dx \stackrel{c}{=} x \ln x - x.$$

Příklad: Spočtěme neurčitý integrál $\int x \operatorname{arccotg} x \, dx$ pro $x \in (-\infty, \infty)$. Chceme vyderivovat arkus kotangens, takže zvolíme:

$$u(x) = \operatorname{arccotg} x, \qquad v'(x) = x.$$

Potom

$$u'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Dosadíme:

$$\int x \operatorname{arccotg} x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2} \operatorname{arccotg} x - \int \frac{x^2}{2} \Big(-\frac{1}{1+x^2} \Big) \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx.$$

Dále upravíme zlomek:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{a integrujeme} \quad \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \stackrel{c}{=} x + \operatorname{arccotg} x.$$

Celkem

$$\int x \operatorname{arccotg} x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \big(x + \operatorname{arccotg} x \big).$$

Praktický návod pro integraci per partes podle typu funkcí:

- **Polynom $P(x)$ krát goniometrická nebo exponenciální funkce:**

  $$P(x) \sin x, \quad P(x) \cos x, \quad P(x) e^x$$

  $\Rightarrow$ derivujeme polynom, integrujeme druhou funkci.

- **Polynom $P(x)$ krát logaritmus nebo cyklometrická funkce:**

  $$P(x) \ln x, \quad P(x) \operatorname{arctg} x, \quad P(x) \operatorname{arccotg} x$$

  $\Rightarrow$ integrujeme polynom, derivujeme druhou funkci.

- **Samostatný logaritmus nebo cyklometrická funkce:**

  $$\ln x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arccotg} x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x$$

  $\Rightarrow$ zvolíme ji za u (derivujeme) a položíme $v' = 1$.

Substituce

Jestliže funkce f je spojitá v intervalu (a, b), funkce φ má v intervalu (α, β) vlastní derivaci φ' a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ platí $\varphi(t) \in (a, b)$, potom při substituci

$$x = \varphi(t) \qquad \text{platí} \qquad \int f(x)\, dx \stackrel{c}{=} \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt \qquad t \in (\alpha, \beta).$$

Příklad: Spočtěme $\int 2x \cos(x^2)\, dx$ pro $x \in (-\infty, \infty)$. Vidíme vnitřní funkci $\varphi(x) = x^2$ a její derivaci $\varphi'(x) = 2x$, takže zvolíme substituci:

$$t = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad dt = 2x\, dx,$$

tedy

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx \stackrel{c}{=} \int \cos t\, dt \stackrel{c}{=} \sin t \stackrel{c}{=} \sin(x^2).$$

Příklad: Spočtěme $\displaystyle\int \frac{dx}{9 + x^2}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$. Jelikož v integrandu nevidíme vnitřní funkci a její derivaci, ale tvar připomíná známý vzorec $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2} \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x$, pokusíme se číslo 9 odstranit vhodnou substitucí:

$$x = 3t \qquad \Rightarrow \qquad dx = 3\, dt.$$

A dosadíme do integrálu:

$$\int \frac{dx}{9 + x^2} \stackrel{c}{=} \int \frac{3\, dt}{9 + 9t^2} \stackrel{c}{=} \int \frac{dt}{3(1 + t^2)} \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1 + t^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}.$$

Existence určitého integrálu a souvislost s primitivní funkcí

Jestliže funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak **existuje určitý integrál** $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$. Je-li F spojitou primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b), potom platí

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Příklad: Spočtěme určitý integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $[0, 1]$. Nejprve najdeme primitivní funkci:

$$F(x) = \int x\, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2}.$$

Potom

$$\int_0^1 x\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

To odpovídá obsahu trojúhelníka se základnou i výškou délky 1.