Obsah rovinného obrazce

V této části propojujeme určitý integrál s výpočtem obsahu rovinných obrazců. Budeme pracovat s funkčními předpisy ve tvaru $y = f(x)$, kde funkce f je na daném intervalu spojitá. Budeme řešit tři základní situace:

- funkce je nezáporná na intervalu,
- funkce je nekladná na intervalu,
- funkce mění znaménko (část grafu funkce leží nad osou x, část pod ní),

a dále obsah ohraničený grafy dvou funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$.

Nezáporná funkce

Nejjednodušší situace nastává, když funkce f je na intervalu $[a, b]$ nezáporná:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{pro všechna } x \in [a, b].$$

Geometrický význam určitého integrálu. Je-li f spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, potom obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ je

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Příklad 1. Spočtěme obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^2$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 2$. Funkce $f(x) = x^2$ je na intervalu $[0, 2]$ nezáporná, proto

$$S = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Nekladná funkce

Pokud je funkce na intervalu nekladná, integrál vyjde nekladný, ale *obsah* chceme kladný. Předpokládejme, že

$$f(x) \leq 0 \quad \text{pro všechna } x \in [a, b].$$

Potom obsah obrazce ohraničeného grafem $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ je

$$S = \int_a^b -f(x)\,dx.$$

Příklad 2. Spočtěme obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $y = -x^2$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 2$. Funkce $f(x) = -x^2$ je na intervalu $[0, 2]$ záporná. Obsah je tedy

$$S = \int_0^2 -(-x^2)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Funkce měnící znaménko na intervalu

V praxi často nastává situace, že část grafu je nad osou x a část pod osou x. Předpokládejme, že funkce f je spojitá na $[a, b]$ a najdeme takové body

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

že na každém intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ má funkce f stálé znaménko (anebo je nulová).

Postup:

1. Najdeme všechna řešení rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $[a, b]$.
2. Nalezenými body rozdělíme interval $[a, b]$ na dílčí intervaly, na nichž se znaménko nemění.
3. Na každém intervalu $[x_{k-1}, x_k]$, kde $f(x) \geq 0$, přispěje do obsahu $S_k = \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx$.
4. Na každém intervalu $[x_{k-1}, x_k]$, kde $f(x) \leq 0$, přispěje do obsahu $S_k = \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} -f(x)\, dx$.
5. Obsah obrazce je $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$.

Příklad 3. Spočtěme obsah obrazce ohraničeného grafem funkce

$$y = f(x) = x^2 - 1,$$

osou x a přímkami $x = -2$, $x = 2$.

1. Nejprve najdeme body, kde funkce protíná osu x:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Budeme tedy postupně integrovat na intervalech $[-2, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$.

2. Určíme znaménko funkce na jednotlivých intervalech.

- Na intervalu $[-2, -1]$ máme $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ funkce je kladná.
- Na intervalu $[-1, 1]$ máme $f(0) = 0^2 - 1 = -1 < 0 \Rightarrow$ funkce je záporná.
- Na intervalu $[1, 2]$ máme $f(2) = 2^2 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ funkce je kladná.

3. Vyjádření obsahu jako součtu integrálů. Obsah S je

$$S = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx \; + \int_{-1}^{1} -(x^2 - 1)\, dx \; + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\, dx.$$

4. Výpočet. Nejprve najdeme primitivní funkci: $\displaystyle\int (x^2 - 1)\, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^3}{3} - x.$

Dále spočítáme dílčí určité integrály:

$$\int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} = \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{8}{3} + 2\right) = \frac{4}{3},$$

$$\int_{-1}^{1} -(x^2 - 1)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3},$$

$$\int_{1}^{2} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}.$$

Obsah:

$$S = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4.$$

Obsah ohraničený grafy dvou (nebo více) funkcí

Typické zadání: *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$.* Nejjednodušší je situace, kdy na celém intervalu $[a, b]$ platí

$$f(x) \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx.$$

Z toho plyne, že výpočet obsahu můžeme převést na předchozí úlohu: Spočtěme obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $y = f(x) - g(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Často nejsou přímky $x = a$, $x = b$ zadány a je třeba počítat průsečíky funkcí - tedy řešit rovnici $0 = f(x) - g(x)$.

Příklad 4. Spočtěme obsah obrazce mezi křivkami

$$y = x, \qquad y = x^2.$$

1. Průsečíky grafů. Najdeme body, kde se jejich grafy protnou:

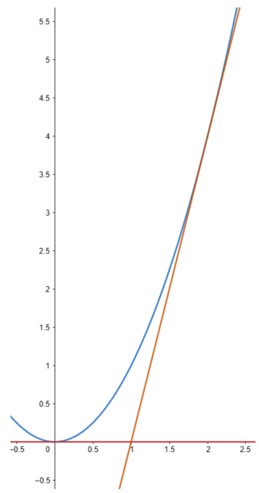
$$x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x - 1) = 0,$$

tedy $x = 0$ nebo $x = 1$. Budeme tedy integrovat na intervalu $[0, 1]$.

2. Která funkce je větší? Na intervalu $[0, 1]$ platí $x \geq x^2$ (například pro $x = \frac{1}{2}$ dostaneme $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$) a tedy $x - x^2 \geq 0$.

3. Sestavení a výpočet integrálu.

$$S = \int_0^1 \big(x - x^2\big)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$



Obrázek 1: Graf funkce $y = x^2$ a jejích tečen.

Příklad 5. Spočtěme obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^2$ a tečnami k tomuto grafu v bodech $x = 0$ a $x = 2$.

1. Tečny ke grafu funkce. Nejprve spočítáme derivaci funkce $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = 2x.$$

- V bodě $x = 0$ máme $f(0) = 0$ a $f'(0) = 0$, tečna má tedy rovnici $t_1 : \; y = 0$.
- V bodě $x = 2$ máme $f(2) = 4$ a $f'(2) = 4$, tečna má tedy rovnici $t_2 : \; y = 4x - 4$.

2. Průsečíky hranic obrazce. Graf funkce a tečny se protínají v zadaných bodech $x = 0$ a $x = 2$. Tečny t_1 a t_2 se protínají v bodě splňujícím podmínku:

$$0 = 4x - 4 \quad \Rightarrow \quad x = 1, \qquad y = 0.$$

3. Výpočet obsahu. Obrazec je tedy ohraničen:

- grafem funkce $y = x^2$ na intervalu $[0, 2]$,
- tečnou $t_1 : y = 0$ na intervalu $[0, 1]$,
- tečnou $t_2 : y = 4x - 4$ na intervalu $[1, 2]$.

Funkce $y = x^2$ je konvexní, takže tečny leží pod grafem její funkce. Obsah tedy vyjádříme jako součet dvou integrálů:

$$S = \int_0^1 \big(x^2 - 0\big)\, dx \; + \int_1^2 \big(x^2 - (4x - 4)\big)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx \; + \int_1^2 \big(x^2 - 4x + 4\big)\, dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\, dx \; + \int_1^2 (x-2)^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \frac{(2-2)^3}{3} - \frac{(1-2)^3}{3} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$$

Zobecněný integrál

Dosud jsme počítali určité integrály, kde je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. V praxi ale často potřebujeme integrovat i funkce:

- na **nekonečném intervalu**,
- nebo které nejsou **spojité nebo definované** v některém bodě.

Pokud funkce není spojitá nebo definovaná ve vnitřním bodě $c \in (a, b)$, využijeme linearitu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{k přesunu bodu } c \text{ do mezí nových integrálů.}$$

A nyní spočítáme zobecněný integrál pomocí limity. Postup závisí na tom, kde je problém:

- **Problém v horní mezi b:** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx.$
- **Problém v dolní mezi a:** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y \to a^+} \int_y^b f(x)\,dx.$
- **Horní mez je $+\infty$:** $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{y \to \infty} \int_a^y f(x)\,dx.$
- **Dolní mez je $-\infty$:** $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{y \to -\infty} \int_y^b f(x)\,dx.$

Integrál existuje (konverguje), pokud příslušná limita existuje a je konečná.

Příklad 6. Spočtěme obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x \ln x$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 1$.

1. Jedná se o zobecněný integrál. Funkce $\ln x$ není definovaná v bodě $x = 0$, ale platí (převedeme na podíl a aplikujeme L'Hospitala):

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0,$$

takže funkci můžeme spojitě dodefinovat nulou a máme tedy uzavřený obrazec.

2. Sestavení integrálu. Na intervalu $(0, 1)$ je $\ln x < 0$, a tedy $x \ln x < 0$.

$$S = \int_0^1 -x \ln x\,dx = \lim_{y \to 0^+} \int_y^1 -x \ln x\,dx.$$

3. Výpočet integrálu (per partes). Spočítáme nejprve neurčitý integrál $\displaystyle\int x \ln x\,dx$:

$$u = \ln x, \quad v' = x \qquad \Rightarrow \qquad u' = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Potom

$$\int x \ln x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

Nyní

$$\int_y^1 x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_y^1 = \left(\frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} \right) - \left(\frac{y^2}{2} \ln y - \frac{y^2}{4} \right).$$

4. Limita pro $y \to 0^+$ (převedeme na podíl a aplikujeme L'Hospitala).

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{y^2}{2} \ln y = \lim_{y \to 0^+} \frac{\ln y}{2y^{-2}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{y^{-1}}{-4y^{-3}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y^2}{-4} = 0, \qquad \lim_{y \to 0^+} \frac{y^2}{4} = 0.$$

5. Dosazení.

$$S = -\lim_{y \to 0^+} \int_y^1 x \ln x \, dx = \frac{1^2}{4} + \lim_{y \to 0^+} \left(\frac{y^2}{2} \ln y - \frac{y^2}{4} \right) = \frac{1^2}{4}.$$

Zobecněný integrál nám tedy umožnil spočítat obsah obrazce, i když funkce v bodě $x = 0$ není definovaná.