Zobrazení a funkce

Uspořádaná dvojice $[x, y]$ je dvojice prvků, kde záleží na pořadí: $[x, y] \neq [y, x]$ pro $x \neq y$.

Zobrazení mezi množinami A a B je množina uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$, $y \in B$, s vlastností, že pro každé $x \in A$ (*vzor*) existuje nejvýše jedno $y \in B$ (*obraz*), takové, že $[x, y]$ je v této množině. Formálně:

$$f : A \to B.$$

Funkce jedné proměnné je speciální případ zobrazení, kdy

$$f : D(f) \to R(f),$$

kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ je **definiční obor** (množina všech vstupních hodnot, pro které je funkce definována) a $R(f) \subseteq \mathbb{R}$ je **obor hodnot** funkce (množina všech hodnot, které funkce nabývá). **Grafem funkce** f nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic: $\{[x, f(x)], x \in D(f)\}$.

Funkce f může mít na intervalu (nebo na celém definičním oboru) různé vlastnosti:

- **Rostoucí funkce**: pro všechna $x_1 < x_2$ z $D(f)$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Klesající funkce**: pro všechna $x_1 < x_2$ z $D(f)$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Neklesající funkce**: pro všechna $x_1 < x_2$ z $D(f)$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **Nerostoucí funkce**: pro všechna $x_1 < x_2$ z $D(f)$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **Monotónní funkce**: funkce, která je buď neklesající nebo nerostoucí.
- **Ryze monotónní funkce**: funkce, která je buď klesající nebo rostoucí.
- **Prostá funkce**: jestliže platí $f(x_1) = f(x_2)$ právě tehdy, když $x_1 = x_2$. V praxi to znamená, že funkce nikdy nenabývá jedné hodnoty více než jednou. Každá ryze monotónní funkce (tedy rostoucí nebo klesající) je prostá.
- **Inverzní funkce**: pokud je funkce prostá a její obor hodnot je $R(f)$, pak existuje inverzní funkce
  $$f^{-1} : R(f) \to D(f),$$
  která každému prvku $y \in R(f)$ přiřadí právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$. **Tedy platí následující dualita mezi definičním oborem a oborem hodnot:**
  $$\boldsymbol{D(f^{-1}) = R(f) \quad \text{a} \quad R(f^{-1}) = D(f)}.$$
  Dále platí vztahy:
  $$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{pro všechna } x \in D(f) = R(f^{-1})$$

a

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{pro všechna } y \in D(f^{-1}) = R(f).$$

Grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem symetrické podél osy $y = x$.

- **Omezená funkce**: funkce, pro kterou existují čísla m, M taková, že $m \leq f(x) \leq M$ pro všechna $x \in D(f)$.
- **Sudá funkce**: pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$.
- **Lichá funkce**: pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.
- **Periodická funkce**: existuje číslo $T > 0$, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $(x + T) \in D(f)$ a $f(x + T) = f(x)$.

Elementární funkce a jejich definiční obory

Funkce	Definiční obor $D(f)$
Konstantní $f(x) = b$	$\mathbb{R}$
Lineární $f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$
Kvadratická $f(x) = ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
Mocninná $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
Mocninná $f(x) = x^{-n},\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Exponenciální $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}$
Logaritmická $f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$(0, \infty)$
Sinus $f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
Kosinus $f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
Tangens $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Kotangens $f(x) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Arkus sinus $f(x) = \arcsin x$	$[-1, 1]$
Arkus kosinus $f(x) = \arccos x$	$[-1, 1]$
Arkus tangens $f(x) = \operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$
Arkus kotangens $f(x) = \operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$

Inverzní funkce ke goniometrickým funkcím (sin, cos, tg, cotg) označujeme běžně jako *cyklometrické funkce* (arcsin, arccos, arctg, arccotg).

Inverzní funkce k elementárním funkcím

Mnohé elementární funkce nejsou na svém definičním oboru prosté, a tedy nemají inverzní funkci v celém definičním oboru. Pokud však takovou funkci omezíme na interval, na kterém je ryze monotónní, pak inverzní funkce již existuje. Níže uvádíme tabulku nejčastějších inverzních funkcí:

Funkce	$D(f)$	$R(f)$	**Inverzní funkce**	$D(f^{-1})$	$R(f^{-1})$
$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{cotg} x$	$(0, \pi)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$\log_a x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$	a^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$ax + b$ $(a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n (n liché, $n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^{-n} (n liché, $n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\sqrt[-n]{x} = x^{-1/n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Základní vzorce pro logaritmy a goniometrické funkce

Vzorce pro logaritmy

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $x > 0$, $y > 0$. Pak platí následující základní vztahy:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (vzorec pro změnu základu)

Základní goniometrické vztahy

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(-x) = -\sin x$ (lichost funkce sinus)
- $\cos(-x) = \cos x$ (sudost funkce kosinus)
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Rovinné křivky a způsoby jejich popisu

Rovinná křivka je množina uspořádaných dvojic $[x, y]$, které splňují daný vztah.

Funkce vs. křivka

Funkce $f \colon D(f) \to \mathbb{R}$ každému $x \in D(f)$ přiřadí právě jednu hodnotu $y = f(x)$. Grafem funkce je tedy křivka, která prochází nejvýše jedním bodem v každé svislé přímce. Naopak **křivka** obecně může mít v jedné svislé přímce více bodů – typickým příkladem je kružnice nebo elipsa. Proto nelze všechny křivky vyjádřit pomocí funkce.

Základní způsoby popisu křivek

Rovinné křivky lze popsat několika různými způsoby:

1. **Explicitně:** Křivka je zadána předpisem funkce $y = f(x)$. Např. parabola: $y = x^2$.
2. **Implicitně:** Křivka je určena rovnicí $F(x, y) = 0$, kde F je funkce dvou proměnných. Např. kružnice: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.
3. **Parametricky:** Souřadnice bodů křivky jsou určeny pomocí parametru t:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \qquad \text{pro } t \in I. \end{aligned}$$

4. **Vztahem mezi polárními souřadnicemi:** (r, φ):

$$r = r(\varphi),$$

kde r je vzdálenost od počátku a φ je úhel, který svírá vektor s kladnou poloosou x, měřený kladně proti směru hodinových ručiček v obloukové míře.

Mezi polárními a kartézskými souřadnicemi platí tento vztah:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

Srovnání způsobů popisu křivek

- **Explicitní zápis:**
  jednoduchý tvar, snadná derivace podle x;
  málo obecný - zahrnuje jen funkce.

- **Implicitní zápis:**
  umožňuje popis obecnějších tvarů (např. kružnic, elips);
  složitější na práci (např. implicitní derivace).

- **Parametrický zápis:**
  popisuje libovolnou křivku, zachovává orientaci, vhodný pro pohybové úlohy;
  méně názorný, obtížnější zpětné převedení na jiný zápis.

- **Polární zápis:**
  přirozený pro křivky s kruhovou symetrií (spirály, růžice apod.);
  složitější analyticky (např. výpočty derivací nebo délek křivek).