Derivace

Derivace funkce představuje **směrnici tečny ke grafu funkce** v daném bodě. Tečna je přímka, která se v daném bodě dotýká grafu funkce a přibližně ho kopíruje v jeho okolí.

Směrnice sečny a definice derivace

Směrnice sečny procházející body $[x, f(x)]$ a $[x+h, f(x+h)]$ je dána vztahem:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Pokud $h \to 0$, sečna se může změnit na tečnu. Jestliže existuje konečná limita:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nazýváme ji derivací funkce f v bodě x a značíme ji $f'(x)$.

Směrnice přímky

Uvažujme funkci $f(x) = 2x+1$ a spočítáme její derivaci podle definice:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)+1-(2x+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Funkce $f(x) = 2x+1$ má tedy ve všech bodech stejnou derivaci $f'(x) = 2$, což odpovídá směrnici její tečny. **Přímka je totiž zároveň i svou vlastní tečnou.**

Jednostranné derivace

Stejně jako počítáme jednostranné limity, počítáme i **jednostranné derivace**:

- **Derivace zprava** v bodě x_0: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- **Derivace zleva** v bodě x_0: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Funkce má v bodě x_0 **derivaci**, právě když jednostranné derivace existují a jsou si rovny:

$$f'(x_0) = A \quad \Leftrightarrow \quad f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = A$$

Definičním oborem funkce f' je množina všech bodů, v nichž má funkce f vlastní (konečnou) derivaci. **Druhá derivace** funkce f je derivace funkce f' a značí se $f''(x)$. Druhá derivace vyjadřuje, jak se mění směrnice tečny, tedy jak se mění tempo růstu funkce.

Spojitá funkce bez derivace v bodě 0**:** $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

Spočítáme jednostranné derivace v bodě $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Jednostranné derivace jsou různé, takže derivace v bodě 0 neexistuje, přestože je tam funkce spojitá. Graf má totiž v tomto bodě ostrý zlom.

Základní vzorce

- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad x > 0,\ n \in \mathbb{R},$
- $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (c)' = 0 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$
- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad x \neq 0,\ n \text{ celé záporné},$
- $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x \quad \text{pro } a > 0,\ x \in \mathbb{R},$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad \text{pro } a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,$
- $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R},$
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \text{pro } x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad \text{pro } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pro } |x| < 1,$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$

$\arcsin x$ **a** $\arccos x$ **jsou definovány na** $[-1, 1]$**, ale jejich derivace jen na** $(-1, 1)$**.**

Pravidla pro derivování

Ve všech následujících pravidlech předpokládáme, že funkce f a g mají vlastní derivaci v bodě x. U složené funkce musí mít vnější funkce f vlastní derivaci v bodě $g(x)$.

- Derivace součtu: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- Derivace rozdílu: $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
- Derivace součinu: $(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
- Derivace podílu: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, pokud $g(x) \neq 0$
- Derivace složené funkce: $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\, g'(x)$

Příklad 1: Derivujte funkci

$$f(x) = x\sqrt{x} + \frac{\sin(x)}{x} + \ln(x^2 + 1)$$

1. člen: Derivace součinu $x\sqrt{x}$

$$(x\sqrt{x})' = x\left(\sqrt{x}\right)' + x'\sqrt{x} = x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x}}{2} \quad \text{pro } x > 0.$$

2. člen: Derivace podílu $\dfrac{\sin(x)}{x}$

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{x(\sin(x))' - \sin(x)x'}{x^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \quad \text{pro } x \neq 0.$$

3. člen: Derivace složené funkce $\ln(x^2 + 1)$

$$\big(\ln(x^2 + 1)\big)' = \frac{1}{x^2 + 1}\, 2x = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

Sečteme dílčí derivace a uděláme průnik podmínek:

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} + \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{pro } x > 0.$$

Příklad 2: Derivujte funkci

$$f(x) = \frac{xe^x}{\operatorname{tg} x} + \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

1. člen: Derivace podílu, v čitateli je součin:

$$\left(\frac{xe^x}{\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{(xe^x)' \operatorname{tg} x - xe^x (\operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{tg} x)^2} = \frac{e^x(x+1)\operatorname{tg} x - xe^x \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x)^2} \quad \text{pro } x \notin \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. člen: Derivace trojnásobně složené funkce $\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$. Postupně derivujeme nejprve logaritmus, pak odmocninu a nakonec polynom:

$$\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2(1+x^2)} = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

Sečteme dílčí derivace a uděláme průnik podmínek:

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1)\operatorname{tg} x - xe^x \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x)^2} + \frac{x}{1+x^2} \quad \text{pro } x \notin \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Odvození derivace funkce $g(x)^{h(x)}$

Jestliže $g(x) > 0$ a g a h mají vlastní derivaci v bodě x, pak platí:

$$f'(x) = \left(g(x)^{h(x)}\right)' = \left(e^{h(x)\ln g(x)}\right)' = e^{h(x)\ln g(x)} \left(h'(x)\ln g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right) =$$

$$= g(x)^{h(x)} \left(h'(x)\ln g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right).$$

Příklad 3: Derivujte funkci $f(x) = x^x$ pro $x > 0$:

$$f'(x) = (x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1) \quad \text{pro } x > 0.$$

Diferenciál funkce

Má-li funkce $y = f(x)$ vlastní derivaci v bodě x, pak její **diferenciál** je $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, kde $\mathrm{d}x$ je malá změna argumentu. Diferenciál přibližně vyjadřuje změnu funkční hodnoty. **Přírůstek** tedy můžeme odhadnout takto:

$$\Delta f(x, \mathrm{d}x) = f(x + \mathrm{d}x) - f(x) \approx \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Přibližný výpočet odmocniny

Spočtěme přibližně $\sqrt{4{,}1}$ pomocí diferenciálu. Tedy $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$, $\mathrm{d}x = 0{,}1$ a dostaneme přibližný výsledek:

$$\sqrt{4{,}1} \approx \sqrt{4} + \mathrm{d}y = 2 + f'(4)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}}\,0{,}1 = 2 + 0{,}025 = 2{,}025.$$

Přesná hodnota je přibližně 2,024846, takže náš výsledek je velmi blízko.