Cvičení 5

Příklad 1. U následující funkce najděte inverzní funkci a určete definiční obory a obory hodnot obou funkcí tak, aby na nich byly funkce navzájem inverzní:

$$f(x) = 5 \sin\left(\frac{2x+1}{3}\right) - 2$$

$$\left(\begin{array}{l} f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2} \arcsin\left(\dfrac{x+2}{5}\right) - \dfrac{1}{2}, \\ D(f) = H(f^{-1}) = \left[-\dfrac{3\pi+2}{4}, \dfrac{3\pi-2}{4}\right], \\ H(f) = D(f^{-1}) = [-7, 3] \end{array}\right)$$

Příklad 2. Vypočtěte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right) \quad (\frac{3}{2})$

Příklad 3. Spočtěte:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^4 - (1+4x+6x^2)}{x^3} \quad (4)$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) \quad (0)$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x}-1}{x} \quad (0)$.

Příklad 4. Spočtěte derivaci (derivace vyšších řádů) funkce f a určete obor platnosti:

- $f(x) = \sin\pi \cos x + \sin x \cos\dfrac{\pi}{2} \quad (0 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R})$,
- $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \quad \left(\dfrac{-3}{2x^2\sqrt{x}} \quad \text{pro } x > 0\right)$,
- $f(x) = x(\sin x + \ln x) \quad (\sin x + x\cos x + \ln x + 1 \quad \text{pro } x > 0)$,
- $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x^2} \quad \left(e^{\operatorname{arctg} x^2} \dfrac{2x}{1+x^4} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}\right)$,
- $f(x) = \sqrt{1-x} \arccos\sqrt{x} \quad \left(\dfrac{-1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\arccos\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} \quad \text{pro } x \in (0,1)\right)$.

Složitější příklady

Příklad 5. Spočtěte derivaci funkce f a určete obor platnosti:

- $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} \quad \left(\frac{1}{1 + x^4} \qquad \text{pro } x \neq \pm 1 \right),$
- $f(x) = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad \left(\begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & \text{pro } x > 0, \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{pro } x < 0. \end{cases} \right)$

Příklad 6. Spočtěte diferenciál funkce f zadané předpisem $f(x) = x^2 + x + 1$.
$(\Delta f(x, h) = (2x + 1)h)$

Příklad 7. Pomocí diferenciálu spočtěte přibližnou hodnotu $\sqrt{16{,}06}$.
Řešení: Označíme-li $f(x) = \sqrt{x}$, je $\Delta f(x, h) = \frac{h}{2\sqrt{x}}$. Potom $f(x + h) \approx f(x) + \Delta f(x, h)$, nebo-li $\sqrt{16{,}06} \approx \sqrt{16} + \frac{0{,}06}{2\sqrt{16}} = 4{,}0075$.

Příklad 8. Určete definiční obor funkcí zadaných předpisy $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ a $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.
V bodech, kde nejsou tyto funkce definovány, je dodefinujte tak, aby byly spojité.

Příklad 9. Podle definice spočítejte derivaci funkce zadané předpisem $f(x) = x^4$ a určete obor platnosti.

Příklad 10. Dokažte, že funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

je v bodě nula spojitá, ale nemá v tomto bodě derivaci.

Příklad 11. Spočtěte derivaci v bodě nula u následujících funkcí:

- $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (\infty)$,
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad$ (neexistuje).