Cvičení 3

Příklad 1. Vyřešte rovnici:

$$4\sqrt{3x+1} - 3\sqrt{5x-1} = 2.$$

(Výsledek: $x = 1$ nebo $x = 65$)

Příklad 2. Řešte rovnici:

$$\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1.$$

(Výsledek: $x = 4$)

Příklad 3. Určete definiční obory následujících funkcí:

- $y = \dfrac{1}{\ln(x-1)} \qquad (x \in (1,2) \cup (2,+\infty))$,
- $y = \arcsin\left(\dfrac{x+2}{3}\right) \qquad (x \in [-5,1])$,
- $y = \sqrt[4]{\dfrac{x+5}{x-2}} \qquad (x \in (-\infty,-5] \cup (2,+\infty))$,

Příklad 4. U následujících funkcí najděte inverzní funkce a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na nich byly tyto funkce navzájem inverzní:

- $f(x) = 3^x+5 \quad \left(f^{-1}(x) = \log_3(x-5),\ D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R},\ H(f) = D(f^{-1}) = (5,\infty)\right)$,
- $f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \quad \left(f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2},\ D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}\setminus\{3\},\ H(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}\setminus\{2\}\right)$,
- $f(x) = x^3+1 \quad \left(f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1},\ D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R},\ H(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}\right)$,
- $f(x) = \sin\left(\frac{2x-1}{3}\right) \quad \left(\begin{array}{l} f^{-1}(x) = \dfrac{1+3\arcsin x}{2}, \\ D(f) = H(f^{-1}) = \left[\dfrac{2-3\pi}{4}, \dfrac{2+3\pi}{4}\right], \\ H(f) = D(f^{-1}) = [-1,1] \end{array}\right)$.

Příklad 5. Zopakujte, jak jsou definovány algebraické operace s nekonečny. Které operace nejsou definovány?

Příklad 6. Vypočtěte:

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2-3n+1} \quad (2),$
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+5}{n^3+1} \quad (0),$
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+1}{n^2+2n+5} \quad (\infty).$

Příklad 7. Rozhodněte o konvergenci následujících posloupností:

- $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n^2+2n+1} \quad$ (neexistuje),
- $\lim_{n\to\infty} (-1)^{8n^2+2n+1} \quad (-1)\,.$

Příklad 8. Vypočtěte: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right). \quad (0)$

Složitější příklady

Příklad 9. Na příkladu kružnice ukažte jednotlivé možnosti popisu křivky - explicitní, implicitní, parametrickými rovnicemi a vztahem mezi polárními souřadnicemi. Vysvětlete jakým způsobem nakreslíme graf křivky z popisu parametrickými rovnicemi a z popisu vztahu mezi polárními souřadnicemi.

Příklad 10. Převeďte implicitní popis lemniskáty ($(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$) a elipsy do polárních souřadnic. Potom nakreslete grafy obou křivek a Archimedovy spirály ($r = a\varphi,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ \varphi \geq 0$).

Příklad 11. Vypočtěte: $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right). \quad \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

Příklad 12. Vypočtěte:

- $\lim_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \quad \left(e^{-1}\right),$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n \quad \left(e^{3}\right).$

Příklad 13. Spočtěte limitu výrazu $\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + \cdots + a_0}{b_l n^l + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k < l, \\ \frac{a_k}{b_l} & \text{pro } k = l, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{b_l}\right) \cdot \infty & \text{pro } k > l. \end{cases}$

Příklad 14. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte následující tvrzení:

- $|ab| = |a||b|$,
- $|a| = |-a|$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$,
- $|a - b| = |b - a| \geq |a| - |b|$,
- $|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|$,
- je-li $0 \leq a < b$ a n celé kladné, potom $a^n < b^n$.

Příklad 15. Podle definice limity posloupnosti dokažte, že

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{n^2 - 1} = \infty$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ není rovna 1.