Cvičení 14

Příklad 1. Vypočtěte integrály

- $\displaystyle\int_{-2}^{-1} 4x\ln(-2x)\,dx \qquad (= 3 - 14\ln 2),$
- $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{2\operatorname{tg} x} + 1 + \operatorname{tg} x\right)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$
  $\displaystyle\left(\overset{c}{=} -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg} x\right| + \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x \quad \text{například pro } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right),$
- $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{(1+\cos x - \cos^2 x)\sin x\,dx}{\cos^2 x + 4} \qquad \left(= 1 + \ln 2 - \frac{\ln 5}{2} - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right),$
- Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = x\sin x$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3\pi \qquad (= 9\pi)$.

Příklad 2. Vypočtěte zobecněné Riemannovy integrály

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(= \lim_{y\to 1^-} \arcsin y = \frac{\pi}{2}\right),$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \qquad \left(= \frac{3}{2}\left(\lim_{y\to 0^-}\sqrt[3]{y^2} - \lim_{y\to 0^+}\sqrt[3]{y^2}\right) = 0\right).$

Příklad 3. Určete délku úsečky $y = ax + b$ na intervalu $[c, d]$. $\qquad \left((d-c)\sqrt{1+a^2}\right)$

Složitější příklady

Příklad 4. Objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací rovinné křivky, která je grafem spojité funkce $y = f(x)$, definované na intervalu $[a, b]$, podél osy x, je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Určete objem rotačního kužele, jehož plášť vznikl otáčením úsečky $y = kx$, $x \in [0, v]$, kde $k, v > 0$. $\qquad \left(\dfrac{k^2 v^3 \pi}{3}\right)$

Příklad 5. Obsah rotační plochy, která vznikne rotací rovinné křivky, která je grafem spojité funkce $y = f(x)$, definované na intervalu $[a, b]$, podél osy x, je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Určete obsah kulového pásu, jež vznikl rotací oblouku kružnice $(y - c)^2 + x^2 = R^2$, $y \in [a, b]$, kolem osy y, kde $c - R \leq a < b \leq c + R$. $(S = 2\pi R(b - a))$

Příklad 6. Je-li obrazec ohraničen grafem spojité a nezáporné funkce $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, potom souřadnice těžiště jsou dány předpisem

$$x_T = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} \qquad y_T = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b f^2(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}.$$

Určete souřadnice těžiště obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = x$ na intervalu $[0, 1]$ a $y = 2 - x$ na intervalu $[1, 2]$, a osou x. $\left(\left[1, \frac{1}{3}\right]\right)$