

I. Obsah

1. Zobrazení.....	5
2. Vektorový prostor.....	6
Co je možné s vektorovými veličinami provádět (operace).....	6
.....	6
Dodatkové operace a pojmy.....	7
Základní operace.....	7
Skládání orientovaných úseček (vektorové veličiny).....	7
Násobek, nula a opačný vektor.....	8
Vlastnosti skládání (sčítání) orientovaných úseček (vektorů).....	8
Komutativita sčítání orientovaných úseček.....	8
Asociativita sčítání orientovaných úseček.....	8
Nulový vektor v součtu.....	8
Opačný vektor v součtu.....	9
Opakované násobení.....	9
Zachování směru.....	9
Násobek součtu vektorů.....	10
Součet násobků vektorů.....	10
Ilustrace distributivních pravidel.....	10
Základní charakteristiky.....	11
Definice vektorového prostoru.....	11
Závěrečné poznámky.....	12
Příklady vektorových prostorů.....	12
Geometrické vektory.....	12
Aritmetické vektory.....	12
Mnohočleny.....	13
Mnohočleny s omezeným stupněm.....	13
Mnohočleny bez omezení stupně.....	13
Mnohočleny dvou proměnných.....	13
Lineární mnohočleny více proměnných.....	14
Funkční prostor.....	14
Rovnice.....	14
3. Lineární kombinace vektorů.....	15
Definice.....	15
Lineární obal množiny.....	15
Vlastnosti lineárního obalu.....	15
Podprostor.....	15
Příklady podprostoru.....	16
Změny lineárních rovnic, které zachovávají lineární obal.....	16
Gaussova eliminační metoda.....	16
Gaussovské operace.....	16
4. Soustavy lineárních rovnic.....	17
Definice řešení.....	17
Definice množiny lineárních rovnic a řešení soustavy.....	17
Lineární kombinace rovnic ze soustavy.....	18
Soustavy se stejnou množinou řešení.....	18
5. Lineární závislost vektorům.....	18
Lineárně závislá množina.....	18
Netriviální lineární kombinace.....	18

Báze vektorového prostoru.....	19
Příklady bazí.....	19
Dimenze vektorového prostoru.....	19
Stenitzova věta.....	19
Důsledek Stenitzovy věty – definice dimenze.....	19
Dimenze typických prostorů.....	20
Zavedení souřadnic.....	20
Zápis souřadnic.....	20
Izomorfismus vektorových prostorů.....	20
6. Číselné matice a operace s nimi.....	21
Matice přechodu.....	21
Násobení matic vektorem.....	21
Násobení matic - obecně.....	22
Vlastnosti násobení.....	22
Inverzní matice.....	22
Vlastnosti inverzní matice.....	23
Gaussova-Jordanova eliminace.....	23
Maticové rovnice.....	23
Permutační matice.....	23
Jednotková matice.....	24
Sčítání matic.....	24
Násobení matic.....	24
Transponovaná matice.....	24
Příklad využití transpozice.....	25
Blokové matice.....	25
7. Výpočetní náročnost operací s maticemi.....	26
Pro výpočet inverzní matice 2×2 , Strassenův algoritmus.....	26
8. Lineární zobrazení na vektorových prostorech.....	26
Terminologie a množiny.....	26
Prosté zobrazení, skládání zobrazení.....	26
Přípustné operace s obrazy.....	27
Lineární kombinace zobrazení.....	27
Lineární zobrazení.....	27
Aditivní a homogenní zobrazení.....	27
Příklady lineárních zobrazení.....	28
Vlastnosti definičního oboru.....	28
Vlastnosti oboru hodnot.....	28
Jádro lineárního zobrazení.....	29
Operace s lineárními zobrazeními.....	29
Linearita lineární kombinace.....	29
Linearita složeného zobrazení.....	29
Linearita inverzního zobrazení.....	29
9. Frobeniova věta.....	30
Postup řešení rovnice $f(x) = b$	30
Věta o dimenzích.....	30
Hodnost složeného zobrazení.....	30
Souvislost s řešením soustav lineárních rovnic.....	31
10. Maticová reprezentace lineárního zobrazení.....	32
Souřadnice vektoru v bázi.....	32
Vlastnosti souřadnic.....	32

Lineární zobrazení a jeho vlastnosti.....	32
Významné množiny vektorů.....	33
Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vzoru.....	33
Konstrukce maticové reprezentace.....	33
Příklady maticových reprezentací:.....	33
Operace se zobrazeními.....	34
Lineární kombinace.....	34
Složené zobrazení.....	34
Inverzní zobrazení.....	34
Změna matice při změně bazí.....	35
Obecná situace.....	35
11. Lineární zobrazení vektorového prostoru do sebe.....	35
Mocnina a mnohočlen endomorfismu.....	35
Vlastní vektor lineárního zobrazení.....	36
Triviální zobrazení.....	36
Hlavní vektor.....	37
Rovnice pro vlastní vektor.....	37
Elementární metody hledání vlastních čísel a vektorů.....	37
Matice 3x3 (GEM s parametrem).....	37
12. Determinant.....	38
Různé definice.....	38
Metody výpočtu determinantu.....	39
Násobením řádku.....	39
Následky výměny řádků matice pro determinantu.....	39
Vzorec pro matici 2x2.....	39
Vzorec pro matici 3x3.....	40
Rozvoj podle řádku.....	40
Permutační cestou.....	41
13. Skalární součin.....	41
Definice.....	41
Vlastnosti.....	41
Norma a skalární součin.....	42
Ortogonalita.....	42
Výpočet skalárního součinu vektorů pomocí souřadnic.....	42
Gramův-Schmidtův algoritmus.....	43
14. Optimální aproximace.....	44
Vektor z podprostoru nejbližší danému vektoru.....	44
Aproximace.....	44
Řešitelnost.....	44
Velikost odchylky.....	44
Výpočet velikosti aproximace.....	44
Fourierovy řady.....	45
15. Matematická indukce.....	46
Množiny.....	46
Princip matematické indukce.....	46
Použití.....	46
Vzorový příklad.....	47
16. Základní pravidla kombinatoriky.....	47
Kombinatorika.....	47
Pravidlo součinu.....	47

Pravidlo součtu.....	47
Dirichletův princip.....	48
Princip inkluze a exkluze.....	48
17. Kombinatorické výpočty.....	48
Variace bez opakování.....	48
Variace s opakováním.....	49
Ekvivalentní množiny.....	49
Faktoriál.....	49
Permutace bez opakováním.....	49
Parita.....	50
Permutace s opakováním.....	50
Kombinace bez opakování.....	50
Kombinace s opakováním.....	51
Některé vztahy kombinačních čísel.....	51
Pascalův trojúhelník a Pascalova identita.....	52
Kombinatorické identity.....	52
Binomická věta.....	53
Multinomická věta.....	53
Zobecněná kombinační čísla.....	53
Newtonův vzorec.....	54
18. Rovinné grafy.....	54
Havlův algoritmus.....	56
Speciální typy grafů.....	56
Souvislost grafů.....	57
19. Ohodnocené grafy.....	59
Eulerovský tah – Fleuryho algoritmus.....	59
Nejkratší cesta.....	59
Problém obchodního cestujícího.....	60
Hledání nejkratší cesty.....	60
Ohodnocení vrcholů.....	60
Minimalizace ohodnocení vrcholů.....	60
Matice sousednosti.....	60
Minimalní kostra grafu.....	61
Algoritmy.....	61
20. Číselné posloupnosti.....	61
Lineární zobrazení na prostoru posloupností.....	63
Diferenční rovnice.....	64
Lineární závislost na předcházejících členech.....	64
Řešení rekurentních vztahů.....	65
Homogenní rekurentní vztahy.....	65
Partikulární řešení.....	65
21. Řešení lineárních rekurentních vztahů.....	66
Lineární rekurentní vztahy s konstantními koeficienty.....	66
Zavedení.....	66
Vlastní podprostor.....	67
Lineární nezávislost.....	67

1. Zobrazení

Definice 1: *Zobrazení* f z množiny \mathcal{M} do množiny \mathcal{N} je předpis, který každému prvku $m \in \mathcal{M}$ (**vzor**) přiřazuje nejvýše jeden prvek z množiny \mathcal{N} . Je-li prvku $m \in \mathcal{M}$ přiřazen prvek $n \in \mathcal{N}$, nazýváme n **obrazem** prvku m při zobrazení f a píšeme $n = f(m)$. Vztah mezi množinami vzorů a případných obrazů zachycujeme zápisem $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Definice 2: Je-li f zobrazením z množiny \mathcal{M} do množiny \mathcal{N} , nazveme **definičním oborem** zobrazení f takovou podmnožinu $D(f)$ množiny \mathcal{M} , že pro každé $d \in D(f)$ existuje jeho obraz $f(d) \in \mathcal{N}$, a pro ty prvky množiny \mathcal{M} , které nenáleží $D(f)$, obraz neexistuje.

Někdy je cílová množina \mathcal{N} zbytečně široká a ukazuje se, že obrazy leží jenom v nějaké její části. I množina všech dosažitelných obrazů může být při rozboru zobrazení důležitá:

Definice 3: Je-li f zobrazením z množiny \mathcal{M} do množiny \mathcal{N} , nazveme **oborem hodnot zobrazení** f množinu $W(f)$ všech těch prvků množiny \mathcal{N} , že pro každé $w \in W(f)$ existuje takový prvek $m \in \mathcal{M}$, že $f(m) = w$.

Předpis, který definuje zobrazení, je obvykle poměrně přehledný, takže nalezení obrazu bývá jednoduchou záležitostí. Častou úlohou je ale to, že známe zobrazení, známe obraz a potřebujeme vzor, jehož zobrazením daný obraz vznikl. Může se přitom stát, že se více různých vzorů zobrazí do téhož obrazu: je například $5 + 2 = 7 = 3 + 4$

Definice 4: Je-li f zobrazením z množiny \mathcal{M} do množiny \mathcal{N} , nazveme **vzorem prvku n** množinu $f^{(-1)}(n)$ všech těch prvků množiny \mathcal{M} , že pro každé $m \in f^{(-1)}(n)$ je $f(m) = n$.

Obor hodnot zobrazení se tedy dá popsat jako množina všech prvků cílové množiny \mathcal{N} , jejichž vzor je neprázdný.

Definice 5: Zobrazení f z množiny \mathcal{M} do množiny \mathcal{N} nazveme **prostým zobrazením**, pokud pro každé dva různé prvky $m_1 \neq m_2$ z definičního oboru zobrazení f je $f(m_1) \neq f(m_2)$.

Definice 6: Je-li zobrazení f z množiny \mathcal{M} do množiny \mathcal{N} prosté, pak zobrazení, které každému prvku $w \in W(f)$ přiřazuje ten prvek $m \in \mathcal{M}$, pro který $w = f(m)$, nazveme **zobrazením inverzním k f** . Značíme ho symbolem f^{-1} a píšeme $m^{-1}(w)$.

Rozmyslete si, že platí následující tvrzení:

1. je-li $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, je $f^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ (pokd existuje),
2. $D(f^{-1}) = W(f)$,
3. $W(f^{-1}) = D(f)$,

Máme množiny \mathcal{K} , \mathcal{M} , \mathcal{N} a nějaká zobrazení $g : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. K prvku $k \in D(g) \subset \mathcal{K}$ existuje jeho obraz $m = g(k) \in \mathcal{M}$, a k němu může existovat nejvýše jeden obraz $f(m) \in \mathcal{N}$. Předpis, který popsaným způsobem přiřazuje prvkům množiny \mathcal{K} prvky množiny \mathcal{N} , je také zobrazením – ke každému prvku množiny \mathcal{K} přiřadíme popsanou cestou nejvýše jeden prvek množiny \mathcal{N} .

Definice 7: Jsou-li $g : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ zobrazení, nazveme zobrazení $h : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{N}$ takové, že $h(k) = f(g(k))$, **zobrazením složeným** ze zobrazení g, f . Zapisujeme ho ve tvaru $h = f(g)$ nebo $h = f \circ g$.

Je potřeba si dát **pozor na pořadí zobrazení g, f** – napravo se píše zobrazení, které se provádí jako první, další zobrazení v pořadí (je možno skládat i větší počet zobrazení než dvě) se přidávají postupně doleva, úplně poslední provedené zobrazení je ve formálním zápisu na prvním místě. Toto napohled podivné pořadí ale je logické, když uvážíme, že zobrazovaný prvek se zapisuje úplně doprava, a tedy první zobrazení, které potká, je skutečně právě to, které s ním v zápisu bezprostředně sousedí.

Definice 8: Zobrazení $i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, které každému prvku $m \in \mathcal{M}$ přiřadí znovu tento prvek, $i_{\mathcal{M}}(m) = m$, se nazývá **identické zobrazení na \mathcal{M}** .

Při skládání zobrazení hraje identické zobrazení roli „neutrálního prvku“: je-li $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, pak $f(i_{\mathcal{M}}) = i_{\mathcal{N}}(f) = f$

Rozmyslete si, že platí následující tvrzení: Je-li $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ prosté zobrazení, pak

1. $f^{-1}(f) = i_{D(f)}$,
2. $f(f^{-1}) = i_{W(f)}$.

2. Vektorový prostor

Co je možné s vektorovými veličinami provádět (operace)

S vektorovými veličinami můžeme nakládat různým způsobem. Známe

- **Skládání** veličin stejného typu, například sil. Výsledkem je zase síla, jejíž celkový účinek je stejný, jako má současné působení všech skládaných sil,
- **Násobek** vektorové veličiny je zase veličina téhož typu s úměrně změněným efektem (délka přiřazené orientované úsečky je příslušným násobkem původní délky, směr zůstává zachovaný)
- **Skalární součin** dvou vektorových veličin je nějaké číslo, které je úměrné součinu velikostí původních vektorů a závisí na úhlu, který svírají
- existuje i **vektorový součin** dvou vektorů v prostoru, to je vektor, který je kolmý na oba původní vektory a jeho velikost je rovna velikosti plochy rovnoběžníka, jehož stranami jsou původní vektory.

Dodatkové operace a pojmy

Existují ještě další pojmy, které se k vektorovým veličinám váží, a to

- **nulový vektor**, to je „neúčinný“ vektor, tedy například žádné posunutí, nulová rychlost (klid), nulová síla (nezpůsobuje žádné pohybové změny), . . . ,
- k danému vektoru můžeme vytvořit **opačný vektor**, který při skládání s původním vektorem anuluje jeho účinky,
- **odečítání vektorů**, to je taková operace, jejíž výsledek po složení s odečítaným vektorem dá druhý z původních vektorů (fyzikálně jde o zrušení dopadů působení odečítaného vektoru)

Základní operace

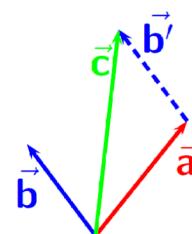
Budeme-li se zabývat nějakou vybranou vektorovou veličinou, třeba rychlostí, zjistíme, že některé z dosud uvedených pojmů se týkají výhradně této veličiny - jsou to

- skládání vektorů,
- číselný násobek vektoru,
- nulový vektor,
- opačný vektor a
- odečítání vektorů.

Skládání orientovaných úseček (vektorové veličiny)

Při skládání posuneme jeden vektor tak, aby byl jeho počátek v koncovém bodě druhého vektoru.

Součtem (složením) vektorů \vec{a} a \vec{b} nazveme vektor (orientovanou úsečku) \vec{c} , která má počáteční bod v počátečním bodě úsečky \vec{a} a koncový bod v koncovém bodě úsečky \vec{b}



Obrázek: Skládání vektorů

Násobek, nula a opačný vektor

k -násobkem orientované úsečky (vektoru) \vec{a} nazveme orientovanou úsečku \vec{d} , jejíž

- délka je $|k|$ -násobkem délky vektoru \vec{a} ,
- směr je stejný jako směr vektoru \vec{a} a
- orientace je stejná jako u vektoru \vec{a} při $k > 0$ a opačná při $k < 0$.



Obrázek: Násobek vektoru

Nulový vektor je úsečka nulové délky (pojem orientace ztrácí smysl), a

vektor **opačný** k vektoru \vec{a} je vektor, který má stejnou délku a opačnou orientaci (obrázek snad není potřeba)

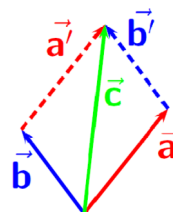
Vlastnosti skládání (sčítání) orientovaných úseček (vektorů)

Skládání orientovaných úseček budeme odteď nazývat **sčítáním** a budeme pro něj používat symbolu „ \oplus “, tedy například $\vec{a} \oplus \vec{b}$.

- Především, součet libovolných dvou orientovaných úseček *existuje* a je to znovu orientovaná úsečka

Komutativita sčítání orientovaných úseček

U součtu vektorů nezáleží na jejich pořadí: $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$



Obrázek: Pořadí skládání vektorů

Asociativita sčítání orientovaných úseček

$$(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$$

Toto pravidlo se nazývá **asociativita** sčítání vektorů a jeho důsledkem je, že při sčítání tří a více vektorů nemusíme vyznačovat, v jakém pořadí je sdružujeme do dvojic:

$$[(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c}] \oplus \vec{d} = \vec{a} \oplus \vec{b} \oplus \vec{c} \oplus \vec{d}.$$

Nulový vektor v součtu

Složíme-li například s jakoukoliv silou nulovou (žádnou) silou, bude výsledný účinek stejný jako u původní síly:

$$\vec{a} \oplus \vec{0} = \vec{a}$$

pro každý vektor \vec{a} . (Nulový vektor značíme symbolem „ $\vec{0}$ “.)

Opačný vektor v součtu

Opačný vektor jsme charakterizovali tak, že jeho složení s původním vektorem ruší jeho účinky, a tedy z pohledu zavedené terminologie musí dát nulový vektor:

$$\vec{a} \oplus (-\vec{a}) = \vec{0}$$

(vektor opačný k \vec{a} značíme $(-\vec{a})$). Opačný vektor jsme navíc uměli zkonstruovat ke každému vektoru, tuto vlastnost si také ponecháme.



Opakované násobení

α -násobek vektoru \vec{a} budeme značit zápisem $\alpha \otimes \vec{a}$, čísla, která představují násobky vektorů, budeme nadále značit písmeny řecké abecedy.

Násobky orientovaných úseček, jsou definovány vždy a jsou to pokaždé zase orientované úsečky. To je první důležité zjištění.

(\rightarrow násobky vektorů jsou vždy další vektory)

Pro orientovanou úsečku \vec{b} , kterou jsme dostali jako α -násobek vektoru \vec{a} , můžeme tedy znovu vytvořit nějaký její β -násobek \vec{c} . Délku orientované úsečky \vec{a} označíme jako $|\vec{a}|$; pro délku úsečky \vec{c} má platit

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= |\beta \otimes \vec{b}| = |\beta \otimes (\alpha \otimes \vec{a})| \\ &= |\beta| \cdot |\vec{b}| = |\beta| \cdot (|\alpha| \cdot |\vec{a}|) = |\beta \cdot \alpha| \cdot |\vec{a}| = |(\beta \cdot \alpha) \otimes \vec{a}| \end{aligned}$$

tedy

$$|\beta \otimes (\alpha \otimes \vec{a})| = |(\beta \cdot \alpha) \otimes \vec{a}|$$

Všechny orientované úsečky \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} mají podle definice násobku stejný směr; při rozboru možných změn orientace **pro záporné násobky** dojdeme k tomu, že poslední vztah bude platit i po odstranění absolutních hodnot a velikostí vektorů:

$$\beta \otimes (\alpha \otimes \vec{a}) = (\beta \cdot \alpha) \otimes \vec{a}$$



Zachování směru

Vlastnost, která zaručí, že násobky orientovaných úseček budou mít stejný směr jako původní vektory: (speciální postačující vztah)

$$1 \otimes \vec{a} = \vec{a}$$

pro každou orientovanou úsečku \vec{a} .

Násobek součtu vektorů

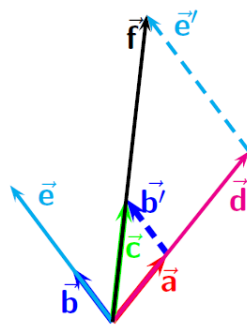
Pro orientovanou úsečku, kterou dostaneme složením dvou jiných, můžeme vytvořit její libovolný násobek:

$$\alpha \otimes (\vec{a} \oplus \vec{b}) = \alpha \otimes \vec{c} = \vec{f}$$

Vytvoříme-li α -násobky vektorů \vec{a} a \vec{b}

$$\vec{d} = \alpha \otimes \vec{a}, \quad \vec{e} = \alpha \otimes \vec{b}$$

dostaneme složením těchto vektorů znovu vektor \vec{f} . Je to důsledkem vztahu, který se nazývá **stejnolehlost**. Výsledek se dá zapísat v podobě



Obrázek: Násobek součtu vektorů

$$\alpha \otimes (\vec{a} \oplus \vec{b}) = \alpha \otimes \vec{a} \oplus \alpha \otimes \vec{b}$$

Součet násobků vektorů

Násobky orientované úsečky jsou další orientované úsečky \rightarrow je možné je skládat. Mají stejný směr jako zdrojová úsečka a je možné vyjádřit je jako její násobek.

$$\alpha \otimes \vec{a} \oplus \beta \otimes \vec{b} = (\alpha + \beta) \otimes \vec{a}$$

toto pravidlo, spolu s tím předcházejícím, tvoří dvojici **distributivních pravidel** a je možno najít rozsáhlé analogie mezi vlastnostmi sčítání a násobení, které jsme našli pro vektory, a stejně pojmenovanými operacemi pro čísla.

Ilustrace distributivních pravidel

Poslední pravidlo snadno vede k výsledku, o kterém jsme uvažovali při snaze zajistit, aby násobek vektoru zachovával směr:

$$\begin{aligned} n \otimes \vec{a} &= \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n\text{-krát}} \otimes \vec{a} = \\ &= \underbrace{1 \otimes \vec{a} \oplus 1 \otimes \vec{a} \oplus \dots \oplus 1 \otimes \vec{a}}_{n\text{-krát}} = \\ &= \underbrace{\vec{a} \oplus \vec{a} \oplus \dots \oplus \vec{a}}_{n\text{-krát}} \end{aligned}$$

Na základě tohoto výsledku **můžeme orientovanou úsečku rozdělit na n stejných částí (n -tin)**:

$$\vec{a} = 1 \otimes \vec{a} = \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \otimes \vec{a} = n \otimes \left(\frac{1}{n} \otimes \vec{a}\right) = \underbrace{\frac{1}{n} \otimes \vec{a} \oplus \frac{1}{n} \otimes \vec{a} \oplus \dots \oplus \frac{1}{n} \otimes \vec{a}}_{n\text{-krát}}$$

Základní charakteristiky

K vytváření násobků lze užít pouze čísla tvořící těleso (to jsou reálná čísla \mathcal{R} , komplexní \mathcal{C} , racionální \mathcal{Q} , ale přirozená \mathcal{N} NE). Vektory potom definujeme jako množinu objektů, pro které jsou zavedené operace sčítání a násobení číslem z tělesa \mathcal{T} . Ne všechny takové soubory (množina, sčítání, násobení) vedou na vektory, násobení a sčítání musí splňovat předešlé uvedené podmínky.

Definice vektorového prostoru

Definice L1: *Vektorovým prostorem* nad tělesem \mathcal{T} nazveme trojici $(\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$, kde \mathcal{M} je množina, jejíž prvky nazýváme *vektory*, \oplus je zobrazení $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ a \otimes je zobrazení $\mathcal{T} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Uvedená zobrazení musí navíc mít následující vlastnosti:

- | | |
|---|--|
| A1 $D(\oplus) = \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ | - je zde definováno sčítání |
| A2 Pro každou dvojici $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ je $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}$ | - sčítání je komutativní |
| A3 Pro každou trojici $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ je $(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c} = \mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c})$ | - sčítání je aditivní |
| A4 Existuje vektor $\mathbf{o} \in \mathcal{M}$ takový, že pro každé $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ je $\mathbf{a} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{a}$ | - existence nulového vektoru |
| A5 Ke každému prvku $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ existuje prvek $(-\mathbf{a}) \in \mathcal{M}$ takový, že je $\mathbf{a} \oplus (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$ | - existence opačného vektoru |
| N1 $D(\otimes) = \mathcal{T} \times \mathcal{M}$ | - je zde definováno násobení |
| N2 Pro každé $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ je $1 \otimes \mathbf{a} = \mathbf{a}$ | - násobení jedničkou |
| N3 Pro každou trojici $(\alpha, \beta, \mathbf{a}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{M}$ je $\alpha \otimes (\beta \otimes \mathbf{a}) = (\alpha \cdot \beta) \otimes \mathbf{a}$ | - opakované násobení |
| D1 Pro každou trojici $(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ je $\alpha \otimes (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) = \alpha \otimes \mathbf{a} \oplus \alpha \otimes \mathbf{b}$ | - vztah stejnolehlosti (1. distributivní pravidlo) |
| D2 Pro každou trojici $(\alpha, \beta, \mathbf{a}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{M}$ je $\alpha \otimes \mathbf{a} \oplus \beta \otimes \mathbf{a} = (\alpha + \beta) \otimes \mathbf{a}$ | - součet násobků vektorů (2. distributivní pravidlo) |

* pozn.: $X \times Y$ značí množinu uspořádaných dvojic (x, y) takových, že x je prvkem X a y je prvkem Y

Výše uvedené body jsou *axiomy* a dají se z nich odvodit tyto výsledky:

- Nulový vektor je jediný
Kdyby existovaly dva nulové vektory $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2$, pak by z jejich nulovosti vyplývalo

$$\mathbf{o}_1 = \mathbf{o}_1 \oplus \mathbf{o}_2 = \mathbf{o}_2,$$

musely by tedy být stejné.

- K žádnému vektoru \mathbf{a} neexistuje „individuální“ nulový vektor \mathbf{o}_a odlišný od univerzálního nulového vektoru \mathbf{o} takový, aby $\mathbf{o}_a \oplus \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Kdyby takový vektor existoval, pak můžeme využít existence opačného vektoru $(-\mathbf{a})$ a došli bychom k

$$\mathbf{o}_a = \mathbf{o} \oplus \mathbf{o}_a = ((-\mathbf{a}) \oplus \mathbf{a}) \oplus \mathbf{o}_a = (-\mathbf{a}) \oplus (\mathbf{a} \oplus \mathbf{o}_a) = (-\mathbf{a}) \oplus \mathbf{a} = \mathbf{o}$$

- Pro každý vektor \mathbf{a} je $0 \otimes \mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Závěrečné poznámky

Jako vektorový prostor se někdy označuje i samotná množina vektorů. Bývá to hlavně kvůli zkrácení formulací (pro vektorový prostor $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ vynecháme popis prostoru jako trojice a píšeme, že vektor $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$). Většinou je ale takový zápis i přes svoji nedůslednost přijatelný



Příklady vektorových prostorů

Geometrické vektory

Množiny orientovaných úseček na přímce, v rovině nebo v prostoru se sčítáním a násobením.

Aritmetické vektory

Definujeme zde operace sčítání a násobení číslem tak, že

- $$(a_1, a_2, \dots, a_n) \oplus (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

- $$\alpha \otimes (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots, \alpha \cdot a_n)$$

Vytvořený vektorový prostor se značí symbolem \mathcal{T}^n , tedy například \mathcal{R}^n , a vektory z těchto prostorů se nazývají **aritmetické vektory**.

Mnohočleny

Mnohočleny s omezeným stupněm

Jako **mnohočleny** (nebo *polynomy*) jedné proměnné definujeme zobrazení (funkce), které každému x přiřazují hodnotu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Čísla a_i nazýváme **koeficienty** mnohočlenu, nejvyšší hodnotu k , pro kterou je $a_k \neq 0$, označujeme jako **stupeň** mnohočlenu. Vezmeme-li množinu \mathcal{P}_n , která obsahuje všechny mnohočleny (jedné proměnné) stupně nejvýše n s koeficienty z tělesa \mathcal{T} , tvoří tato množina spolu s operacemi zavedenými tak, že

- pro $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ je $(P \oplus Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$
- $(\alpha \otimes P)(x) = (\alpha \cdot a_n)x^n + (\alpha \cdot a_{n-1})x^{n-1} + \dots + (\alpha \cdot a_1)x + (\alpha \cdot a_0)$

Mnohočleny bez omezení stupně

Tak, jak jsme mnohočleny definovali, není nutné, aby byly jejich stupně nějak omezené. Na druhou stranu, každý konkrétní mnohočlen má konečný stupeň. (Trochu to souvisí s nekonečností množiny přirozených čísel.) Vezmeme-li dva (libovolné) mnohočleny, můžeme větší z jejich stupňů označit třeba \bar{n} , a oba mnohočleny pak budou náležet do množiny $\mathcal{P}_{\bar{n}}$ a můžeme definovat jejich součet (a pochopitelně i násobek každého z nich) stejně jako v prostoru indukovaném množinou $\mathcal{P}_{\bar{n}}$.

Mnohočleny dvou proměnných

Mnohočleny lze definovat i pro více proměnných. Pracujeme-li například se dvěma parametry x, y , můžeme zavést **mnohočlen dvou** proměnných x, y jako zobrazení, které každé dvojici čísel (x, y) přiřadí číslo

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{j,k} x^j y^k$$

Stupněm takového mnohočlenu pak nazveme nejvyšší hodnotu součtu $j + k$, pro kterou existuje nenulové $a_{j,k}$. Pokud zavedeme sčítání mnohočlenů a jejich násobení číslem obdobně jako u mnohočlenů jedné proměnné, dostaneme znovu vektorový prostor mnohočlenů dvou proměnných stupně nejvýše s , nebo mnohočlenů dvou proměnných (bez omezení stupně)

Lineární mnohočleny více proměnných

Speciálním případem mnohočlenů více proměnných jsou mnohočleny stupně nejvýše 1, nazývané také **lineární funkce více proměnných**

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 = a_0 + \sum_{j=1}^n a_jx_j$$

Sčítání a lineárních funkcí a jejich násobení číslem můžeme znovu zavést „přirozeným způsobem“

- pro $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0$ a $M(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + b_0$ je $(L \oplus M)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + \dots + (a_n + b_n)x_n + (a_0 + b_0)$
- $(\alpha \otimes L)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha \cdot a_1)x_1 + (\alpha \cdot a_2)x_2 + \dots + (\alpha \cdot a_n)x_n + (\alpha \cdot a_0)$

Funkční prostor

Pojem **funkce** jste v matematice asi už slyšeli, na tomto místě asi budou stačit intuitivní představy. Je to zobrazení f z množiny čísel do množiny čísel a běžně se zavádí sčítání funkcí f, g jako

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$$

pro všechna x , která jsou v průniku definičních oborů obou funkcí (jinak není součet definován), a násobek

$$(\alpha \otimes f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

pro všechna $x \in D(f)$ Množina všech funkcí s hodnotami v tělese \mathcal{T} se společným definičním oborem tvoří vektorový prostornad tělesem \mathcal{T} (můžete si znovu ověřit, že platí axiomy).

Omezená funkce – je to taková (reálná) funkce f , že existuje číslo c_f takové, že $|f(x)| \leq c_f$ pro všechna x z definičního oboru

Rovnice

Pod **rovnici** zpravidla rozumíme úlohu najít vzor nějakého prvku b při daném zobrazení f

$$f(x) = b$$

Tvoří-li možné funkce na levé straně tohoto vztahu nějaký vektorový prostor s „přirozeným“ sčítáním a násobením (například tedy mnohočleny nebo omezené funkce), můžeme zavést i sčítáním rovnic a násobení rovnice číslem:

- pro rovnice $R: f(x) = a$ a $S: g(x) = b$ je $(R \oplus S) =$ rovnice $f(x) \oplus g(x) = a + b$
- $(\alpha \otimes R)(x) =$ rovnice $\alpha \otimes f(x) = \alpha \cdot a$

Rovnice s takto zavedenými operacemi tvoří opět vektorový prostor

Př. Prostorů rovnic:

prostor lineárních rovnic,
prostor rovnic stupně nejvýše n ,
prostor lineárních rovnic o n neznámých

3. Lineární kombinace vektorů

Definice

Definice L2.2: Jsou-li $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektory ve vektorovém prostoru $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ nad tělesem \mathcal{T} a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ čísla z tělesa \mathcal{T} , nazveme vektor

$$\vec{b} = \alpha_1 \otimes \vec{a}_1 \oplus \alpha_2 \otimes \vec{a}_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n \otimes \vec{a}_n$$

lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ s **koeficienty** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Zkrácený zápis:

$$\vec{b} = \bigoplus_{j=1}^n \alpha_j \otimes \vec{a}_j.$$

- vytvoření dané lineární kombinace pomocí násobení vektorů číslem a sčítání vektorů

Lineární obal množiny

Lin. obal = množina tvořená součty a násobky (lineárními kombinacemi) jistých konkrétně specifikovaných vektorů, prvků vektorového prostoru

Definice L2.3: Je-li $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ vektorový prostor nad tělesem \mathcal{T} a $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \dots\}$ množina vektorů z \mathcal{M} , nazveme množinu všech možných lineárních kombinací vektorů \mathbf{a}_i **lineárním obalem** množiny \mathcal{A} . (značíme $\text{span}(\mathcal{A})$)

Závěr: Ze dvou různoběžných orientovaných úseček v rovině se dají vytvořit pomocí jejich lineárních kombinací všechny orientované úsečky → lze zkonstruovat celou původní množinu ve vektorovém prostoru (např. 2D rovina)

Změny v lin. množině vektorů které zachovávají lin. obal jsou sčítání vektorů a násobení číslem

Vlastnosti lineárního obalu

Věta L2.1: Je-li $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ vektorový prostor nad tělesem \mathcal{T} a $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \dots\}$ množina vektorů z \mathcal{M} , pak trojice $(\text{span}(\mathcal{A}), \oplus, \otimes)$ je **podprostorem** ve \mathcal{V}

K důkazu stačí ověřit, že součet vektorů z lineárního obalu množiny je zase v něm a násobek lineární kombinace nějakých vektorů je zase lineární kombinací týchž vektorů.

Podprostor

Definice L2.1: Je-li $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ vektorový prostor nad tělesem \mathcal{T} a množina $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ taková, že

- $\oplus : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ a
- $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$,

nazveme $\mathcal{U} = (\mathcal{N}, \oplus, \otimes)$ **podprostorem** vektorového prostoru \mathcal{V} . Zapisujeme to ve tvaru $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

(Číselné těleso je automaticky společné)

(* \subset = je podmnožinou)

Příklady podprostoru

Geometrické vektory, Mnohočleny, Speciální výběr n -tic (např. \mathcal{R}^3), Podprostory funkcí

Změny lineárních rovnic, které zachovají lineární obal

1. Pokud změníme jeden vektor jeho vynásobením nenulovým číslem β , pak jsou si lineární obaly původní množiny i množiny s pozměněným vektorem rovny
2. Pokud nějaký vektor z původní množiny nahradíme jeho součtem s β násobkem nějakého jiného vektoru, pak jsou si lineární obaly původní množiny i množiny s pozměněným vektorem rovny (\rightarrow vektor můžeme nahradit jeho součtem s lineární kombinací ostatních vektorů množiny)
3. Vynecháním vektoru který je lineární kombinací jiných vektorů množiny se zachová lineární obal
4. Přidáním vektoru, který je lineární kombinací jiných vektorů množiny se zachová lineární obal

Gaussova eliminační metoda

Gaussova eliminační metoda je technickým prostředkem, kterým se převádí daná množina n -tic čísel na množinu se stejným lineárním obalem, která má navíc početně výhodné vlastnosti.

Touto množinou je množina n -tic uspořádaných do matice v horním stupňovitém tvaru. Můžeme

- nahradit n -tici (řádek matice) jejím nenulovým násobkem
- nahradit n -tici (řádek matice) jejím součtem s násobkem jiného řádku
- vynechat lineární kombinaci ostatních řádků (nejjistěji to bude nulový vektor)
- vyměnit dva řádky (nemění se množina, jenom uspořádání)

s cílem dostat matici v požadovaném tvaru

Uvedené operace se nazývají *Gaussovské*.

Gaussovské operace

- výměna řádků
- vynásobení řádku číslem
- přičtení (odečtení) α -násobku řádku k jinému řádku
- vynechání řádku

4. Soustavy lineárních rovnic

Lineární rovnice (s n neznámými) rozumíme vztah: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$,
kde a jsou koeficienty, x neznámé a b pravá strana rovnice.

Zkrácený tvar:
$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b$$

Násobek rovnice:
$$\alpha \otimes \mathbf{r} = \left(\sum_{j=1}^n (\alpha a_j) x_j = \alpha b \right)$$

Sčítání rovnic:
$$\mathbf{r} \oplus \mathbf{s} = \left(\sum_{j=1}^n (a_j + c_j) x_j = b + d \right)$$

- výsledkem obou rovnic jsou vždy lineární rovnice o n neznámých

Množina lineárních rovnic o n neznámých se zavedenými operacemi násobení číslem z tělesa T a sčítání vyhovuje všem axiomům vektorového prostoru, tedy **tvorí vektorový prostor**.

Pro nulový vektor v tomto prostoru: $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$, tedy $0 = 0$

Definice řešení *Řešením lineární rovnice* o n neznámých

$$\mathbf{r} = \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j = b \right)$$

nazveme každou (uspořádanou) n -tici čísel (x_1, x_2, \dots, x_n) , pro kterou rovnost výrazů na levé a pravé straně platí.

(Na řešení můžeme také pohlížet jako na vektory, časem uvidíme, že to má i své odůvodnění.)

Při hledání řešení můžeme formulovat úlohy dvou odlišných typů:

- 1 najít *alespoň jedno* řešení
- 2 najít *všechna* řešení

Definice množiny lineárních rovnic a řešení soustavy

Množinu lineárních rovnic (konečnou) $\mathcal{R} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$, kde

$$\mathbf{r}_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \right)$$

nazveme *soustavou lineárních rovnic* (o n neznámých). (Počet neznámých ve všech rovnicích musí být stejný, je ale možné, že některé koeficienty mohou být nulové.)

Řešením soustavy lineárních rovnic o n neznámých nazveme každou n -tici čísel (x_1, x_2, \dots, x_n) , která je řešením **všech** rovnic soustavy.

Lineární kombinace rovnic ze soustavy

Věta L3.2: Je-li $\mathcal{R} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ soustava rovnic o n neznámých a n -tice (x_1, x_2, \dots, x_n) jejím řešením, a rovnice \mathbf{r} je lineární kombinací rovnic z \mathcal{R} , pak (x_1, x_2, \dots, x_n) je řešením rovnice \mathbf{r} .

(umožněno tím, že rovnice tvoří vektorový prostor)

Soustavy se stejnou množinou řešení

Věta L3.3: Jsou-li $\mathcal{R} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ a $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k\}$ soustavy rovnic o n neznámých a $\text{span}(\mathcal{R}) = \text{span}(\mathcal{S})$, pak mají stejnou množinu řešení.

- tedy pokud mají soustavy rovnic stejný lineární obal, pak mají i stejnou množinu řešení

5. Lineární závislost vektorům

Lineárně závislá množina

Definice L3.1: Je-li $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ vektorový prostor nad tělesem \mathcal{T} a $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n(\dots)\} \subset \mathcal{M}$ taková množina vektorů, že existuje vektor $\mathbf{a}_k \in \mathcal{A}$, který je lineární kombinací **ostatních** vektorů z množiny \mathcal{A} , řekneme, že množina \mathcal{A} je **lineárně závislá**.

V opačném případě (žádný vektor z množiny \mathcal{A} se nedá zapsat jako lineární kombinace ostatních vektorů z \mathcal{A}) řekneme, že množina \mathcal{A} je **lineárně nezávislá**. Někdy také říkáme, že **vektory**

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ jsou lineárně závislé (nezávislé), když je lineárně závislá (nezávislá) množina $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$

- pokud vektor nemůžeme vyjádřit lineární kombinací jiných vektorů, pak je množina tohoto vektoru lineárně nezávislá

Netriviální lineární kombinace

Pokud je nějaká množina lineárně závislá, pak existuje **netriviální** lineární kombinace jejích vektorů, která dává nulový vektor.

Další možná definice lineární závislosti:

Věta L3.1: Množina vektorů \mathcal{A} je lineárně závislá, **právě když** existuje netriviální lineární kombinace jejích vektorů, která dá nulový vektor.

Báze vektorového prostoru

Běžně se báze vektorového prostoru definuje mírně odlišným způsobem, ve kterém je požadavek (B2) nahrazen (ekvivalentním) požadavkem lineární nezávislosti:

Definice L4.1a: **Bází** vektorového prostoru $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ nad daným tělesem nazveme takovou lineárně nezávislou množinu $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$, že každý vektor z \mathcal{M} je nějakou lineární kombinací vektorů z \mathcal{E} .

Pokud chceme zjistit, zda je daná množina bazí uvažovaného vektorového prostoru, musíme ověřit dvě skutečnosti.

- lineární nezávislost množiny – technické prostředky k tomu jsou leckdy dostupné, a
- to, že každý vektor v prostoru je dosažitelný lineární kombinací vektorů z dané množiny. To nemusí být zřejmé, ale v některých prostorech existuje jednoduché řešení.

(**Báze** vektorového prostoru je sada lineárně nezávislých vektorů, které vyměří daný prostor)

Příklady bazí

Kanonická báze – vyznačuje se pohodlným výpočtem příslušných koeficientů lineárních kombinací (např. R^n); je v geometrickém prostoru

Kanonická báze v prostoru mnohočlenů -

$$\mathcal{C}_n = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

(vektor báze $\mathbf{c}_j = x^{j-1}$)

Každý mnohočlen stupně nejvýše n se dá elementárně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů \mathbf{c}_j ; jejich lineární nezávislost je důsledkem *základní věty algebry*:

Každý mnohočlen stupně n má nejvýše n kořenů.

Lagrangerova báze

Newtonova báze

Dimenze vektorového prostoru

Stenitzova věta

Věta L4.1 Stenitzova: Každé dvě báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

Důsledek Stenitzovy věty – definice dimenze

Definice L4.2: Počet prvků báze vektorového prostoru \mathcal{V} se nazývá jeho **dimenzí** (zapisujeme jako $\dim(\mathcal{V})$).

Není-li dimenze vektorového prostoru \mathcal{V} konečné číslo, říkáme, že prostor je **nekonečnědimenzionální** (i v případě, že báze nejde vytvořit).

Dimenze typických prostorů

- Prostor geometrických vektorů v rovině má dimenzi 2,
- Prostor geometrických vektorů v prostoru má dimenzi 3,
- Prostor n -tic čísel z tělesa \mathcal{T} má dimenzi n ,
- Prostor mnohočlenů stupně nejvýše n má dimenzi $n + 1$,
- Prostor lineárních rovnic o n neznámých má dimenzi $n + 1$,
(Rozmyslete si, jak by mohla vypadat jeho kanonická báze)
- Prostor všech mnohočlenů má dimenzi ∞ ,
- Prostor všech spojitých funkcí jedné reálné proměnné definovaných všude na \mathcal{R} má dimenzi ∞

Gaussova eliminace a dimenze podprostoru v \mathcal{T}^n

Nenulové řádky, které nám zůstanou po provedení GEM, nám určí počet lineárně nezávislých vektorů.

Zavedení souřadnic

Definice L4.3: Je-li $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ vektorový prostor nad tělesem \mathcal{T} , $\dim(\mathcal{V}) = n$ je konečná a $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ je báze prostoru \mathcal{V} , pak pro vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ nazveme koeficienty lineární kombinace

$$\mathbf{u} = \bigoplus_{j=1}^n (u_j \otimes \mathbf{e}_j)$$

souřadnicemi vektoru \mathbf{u} v bazi \mathcal{E} .

Zápis souřadnic

Souřadnice vektoru \mathbf{u} v bazi \mathcal{E} tvoří n -tici čísel z tělesa \mathcal{T} a

zapisujeme je jako $\mathbf{u}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

- též vektor má v různých bazích obecně různé souřadnice – „jdeme k němu přes jinou cestu“

Izomorfismus vektorových prostorů

Definice L4.4: Jsou-li $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus_{\mathcal{U}}, \otimes_{\mathcal{U}})$ a $\mathcal{V} = (\mathcal{N}, \oplus_{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{V}})$ vektorové prostory nad stejným tělesem \mathcal{T} a existuje prosté zobrazení $\mathcal{I} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} : D(\mathcal{I}) = \mathcal{M}$, $W(\mathcal{I}) = \mathcal{N}$ takové, že pro každé dva vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}$ a každé číslo $\alpha \in \mathcal{T}$ je

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{a} \oplus_{\mathcal{U}} \mathbf{b}) &= \mathcal{I}(\mathbf{a}) \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{I}(\mathbf{b}) \text{ a} \\ \mathcal{I}(\alpha \otimes_{\mathcal{U}} \mathbf{a}) &= \alpha \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{I}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

nazveme zobrazení \mathcal{I} **izomorfismem** vektorových prostorů \mathcal{U} a \mathcal{V} .

O prostorech \mathcal{U} a \mathcal{V} řekneme, že jsou **izomorfní**

(izomorfismus = každému prvku první struktury odpovídá právě jeden prvek struktury druhé a toto přiřazení zachovává vztahy k ostatním prvkům)

Každý lineární prostor L , pro který je $\dim(L) = n$, je izomorfní s lineárním prostorem R^n .

Dva lineární prostory konečné dimenze jsou izomorfní právě tehdy, když se rovnají jejich dimenze.

6. Číselné matice a operace s nimi

Matice přechodu

Máme-li vektorový prostor \mathcal{V} a dvě jeho báze, můžeme jeden vektor z prostoru vyjádřit jako kombinace vektorů z obou bází. Matice přechodu nám pak pomáhá převádět jedno vyjádření na druhé.

Jsou-li \mathcal{E}, \mathcal{F} různé báze téhož n -rozměrného prostoru $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ nad tělesem \mathcal{T} a vektory z báze \mathcal{E} mají v bazi \mathcal{F} souřadnice

$$\mathbf{e}_j^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ \vdots \\ e_{nj} \end{pmatrix} \text{ pro každé } j = 1, 2, \dots, n$$

nazýváme obdélníkové schema

$$I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

maticí přechodu od báze \mathcal{E} k bazi \mathcal{F} . Mezi souřadnicemi vektoru v bázích \mathcal{E}, \mathcal{F} platí vztah

$$u_i^{\mathcal{F}} = \sum_{j=1}^n e_{ij} u_j^{\mathcal{E}}$$

Násobení matic vektorem

Matice v obdélníkovém schématu (z tělesa \mathcal{T}) s m řádky a n sloupci

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a výsledkem násobení matice \mathbf{A} vektorem $\mathbf{u} \in \mathcal{T}^n$ (počet složek vektoru musí být stejný jako počet sloupců matice) je vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{T}^m$ se složkami

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$$

Při výpočtu i -té složky výsledného vektoru násobíme všechna čísla i -tého řádku matice čísly na **stejných místech** v zadaném vstupním vektoru.

Násobení matic - obecně

Definice L5.1: *Součinem matic* \mathbf{A} , \mathbf{B} nazveme matici $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ takovou, že sloupce matice \mathbf{C} dostaneme násobením matice \mathbf{A} sloupci matice \mathbf{B} (pořadí odpovídajících sloupců matic \mathbf{B} a \mathbf{C} je stejné).

Pro matice přechodu máme konkrétně $I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \cdot I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$.

Násobení matice vektorem můžeme interpretovat jako násobení matice jednosloupcovou maticí.

(využíváme tedy vždy dvojici - **řádek** matice \mathbf{A} a **sloupec** matice \mathbf{B})

Součin matic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je definovaný pouze v případě, že počet sloupců matice \mathbf{A} je roven počtu řádků matice \mathbf{B} . Vzniklá matice má stejný počet řádků jako matice \mathbf{A} a stejný počet sloupců jako \mathbf{B} .

Vlastnosti násobení

Záleží na pořadí – musí sedět velikosti, jinak je mezi sebou nelze násobit.

I když se ale **sloupce** $\mathbf{A} =$ **řádkům** \mathbf{B} , při násobení v jiných pořadích nemusí vyjít stejná matice. Tedy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Pokud platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, pak tyto matice nazveme *komutující matice*.

Asociativita maticového násobení

Věta L5.1: Jsou-li \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} takové matice a \mathbf{u} takový vektor, že existují součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$, pak je vždy

- 1 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$
- 2 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}$

Tato vlastnost se nazývá *asociativita maticového násobení*.

Výsledky operací jsou sice při libovolném uzávorkování (sdružení) stejné, technická náročnost (výpočetní doba) ale může být výrazně odlišná (hlavně v úlohách, které obsahují násobení vektorem)

Inverzní matice

Definice L5.2: Pokud pro čtvercovou matici \mathbf{A} existuje matice \mathbf{A}^{-1} , pro kterou $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, řekneme, že matice \mathbf{A} je *regulární* a matice \mathbf{A}^{-1} *inverzní* k \mathbf{A} . V tom případě i $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

(-1 v exponentu je proto, že součin obou matic je roven maticové jedničce)

Vlastnosti inverzní matice

Věta L5.3: Je-li \mathbf{A} regulární matice, pak jsou její řádky lineárně nezávislé vektory.

Věta L5.4: Je-li \mathbf{A} regulární matice, pak $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Věta L5.5: Jsou-li \mathbf{A} , \mathbf{B} regulární matice stejného rozměru, pak existuje i $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1}$ a je

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Gaussova-Jordanova eliminace

Slouží k výpočtu inverzní matice. Nalevo napíšeme matici z které chceme udělat inverzní matici a napravo k ní za čarou dáme jednotkovou matici (viz obrázek)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Pomocí gaussovských operací pak pokračujeme až k získání jednotkové matice na levé straně

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right)$$

Napravo nám vznikne požadovaná inverzní matice.

Maticové rovnice

Pokud násobíme rovnici matic jinou maticí je třeba zachovat stranu z které násobení provádíme na obou stranách rovnice. Příklad s násobením inverzní maticí rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$

Vynásobení této rovnice zleva maticí \mathbf{A}^{-1} (pokud existuje) dá

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Je-li na pravé straně jednosloupcová matice, tedy vektor \mathbf{b} , můžeme rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ interpretovat jako soustavu lineárních rovnic s maticí \mathbf{A} a neznámými složkami vektoru \mathbf{x} .

Permutační matice

Vznikne z jednotkové matice postupnou vzájemnou záměnou sloupců

Jednotková matice

Je čtvercová matice, která má na diagonále jedničky a jinde samé nuly, značíme ji **I** (nebo **E**).

Věta L5.2: Existuje právě jedna matice **1**, pro kterou je $\mathbf{1} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathcal{T}^n$, a tou je **jednotková matice** $n \times n$.

Sčítání matic

Definice L6.1: **Součet matic** **A**, **B** s m řádky a n sloupci je matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, která má m řádků a n sloupců a prvky

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

(musí mít stejné rozměry m a n)

Násobení matic

Násobení všech matic lineárními kombinacemi všech přípustných vektorů je distributivní

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

i pro násobení lineární kombinace matic

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{B} + \beta \cdot \mathbf{C}) = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \beta \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

pro všechny přípustné matice **A**, **B**, **C**

Transponovaná matice

Další operací, která se pro matice zavádí (a prozatím se nám k ničemu nehodila), je **transponování**

Definice L6.3: Je-li **A** matice $m \times n$, nazveme matici \mathbf{A}^T s n řádky a m sloupci, jejíž prvky

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

maticí **transponovanou** k **A**,

Transponovanou matici dostaneme ze zadané matice záměnou řádků za sloupce nebo se to dá popsat jako „překlopení podle diagonály“, například

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Dále při transponování platí:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$$

Pokud **A** je regulární pak $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

Příklad využití transpozice

Úloha: Ve dvourozměrném prostoru máme tři baze \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G} a známe matice přechodu $\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vypočítejte matici přechodu $\mathbf{I}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$.

Řešení: Hledanou matici najdeme pomocí přechodu přes bazi \mathcal{E} :

$$\mathbf{I}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} = \mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} \cdot (\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1}$$

Kdyby byla inverzní matice v součinu nalevo, mohli bychom najít hledanou matici přímo Gaussovou-Jordanovou eliminací schématu (invertovaná matice | druhá matice v součinu) \rightarrow (1 | výsledek). Pro pořadí matic v naší úloze to nejde, po transpozici poslední rovnice ale dostaneme

$$(\mathbf{I}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}})^T = (\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} \cdot (\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1})^T = ((\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1})^T \cdot (\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}})^T = ((\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^T)^{-1} \cdot (\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}})^T$$

Transponovanou výslednou matici tak dostaneme Gaussovou-Jordanovou eliminací ze schématu $\left((\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^T \mid (\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}})^T \right) \rightarrow \left(\mathbf{I} \mid (\mathbf{I}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}})^T \right)$

konkrétně:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim [2] - \frac{1}{2}[1] \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{array} \right) \\ \sim [2] * (-\frac{2}{5}) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim [1] - 3[2] \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ \sim [1] * \frac{1}{2} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Hledaná matice přechodu se dostane transponováním pravé části schématu:

$$\mathbf{I}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Blokové matice

V matici

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1,n_1} & a_{1,n_1+1} & \dots & a_{1,n_2} & & a_{1,n_{b-1}+1} & \dots & a_{1,n_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1,1} & \dots & a_{m_1,n_1} & a_{m_1,n_1+1} & \dots & a_{m_1,n_2} & & a_{m_1,k_{b-1}+1} & \dots & a_{m_1,k_b} \\ \hline a_{m_1+1,1} & \dots & a_{m_1+1,n_1} & a_{m_1+1,n_1+1} & \dots & a_{m_1+1,n_2} & & a_{m_1+1,n_{b-1}+1} & \dots & a_{m_1+1,n_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_2,1} & \dots & a_{m_2,n_1} & a_{m_2,n_1+1} & \dots & a_{m_2,n_2} & & a_{m_2,k_{b-1}+1} & \dots & a_{m_2,k_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array} \right)$$

nám nic nebrání ji symbolicky rozdělit na části,

které nazýváme **bloky**:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n_b} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,n_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m_c,1} & A_{m_c,2} & \dots & A_{m_c,n_b} \end{array} \right)$$

a které jsou také **maticemi**

7. Výpočetní náročnost operací s maticemi

Při výpočtu má na celkovou náročnost příkladu hlavní vliv počet operací při maticovém násobení

Pro výpočet inverzní matice 2 x 2, Strassenův algoritmus

Možná inspirace: Pro výpočet matice inverzní k matici 2×2 dává

Gaussova-Jordanova eliminace celkem $2^3 = 8$ potřebných operací.

Dá se ale odvodit vzorec

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ve kterém potřebujeme dvě násobení $a \cdot d$ a $b \cdot c$

a čtyři dělení hodnotou $D = ad - bc$,

celkem tedy jenom šest operací.

Možná bude něco takového fungovat i pro násobení matic, třeba i 2×2

Při použití Gauss-Jordanovy eliminace je tedy třeba 8 operací, při Strassenově algoritmu 7.

Účinnost tohoto algoritmu se ukáže u blokových matic – při 7 násobeních bloků 2×2 se využije $7^2 = 49$ operací (místo $4^3 = 64$ operací)

8. Lineární zobrazení na vektorových prostorech

Terminologie a množiny

Zobrazení f z množiny M do množiny N .

Množinu všech $x \in M$, pro která existuje obraz $f(x) \in N$, nazýváme definičním oborem zobrazení (označujeme ji $D(f)$), množinu všech $y \in N$, pro která existuje vzor $x \in M$ takový, že $y = f(x)$, nazýváme oborem hodnot $W(f)$ zobrazení.

Množinu všech $x \in M$, pro která je $f(x) = y$, nazýváme vzorem $f^{(-1)}(y)$ prvku $y \in N$.

Pokud $D(f) = M$, mluvíme o zobrazení z množiny M , pokud $W(f) = N$, používáme označení „zobrazení na množinu“ N .

Prosté zobrazení, skládání zobrazení

Pokud mají každá dvě různá $x_1 \neq x_2$ z $D(f)$ i různé obrazy $f(x_1) \neq f(x_2)$, říkáme, že zobrazení f je prosté.

Je-li f zobrazení množiny A do množiny B a g je zobrazení množiny B do množiny C pak $h = g \circ f$ (další značení $f(g(x))$) je zobrazení množiny A do množiny C . Které označujeme jako složené zobrazení.

Připustné operace s obrazy

- 1 sčítat $\mathbf{y}_1 \oplus \mathbf{y}_2 = f(x_1) \oplus f(x_2)$,
- 2 násobit číslem $\alpha \otimes \mathbf{y} = \alpha \otimes f(x)$

Lineární kombinace zobrazení

Definice L7.2: Je-li $\mathcal{V} = (\mathcal{N}, \oplus, \otimes)$ vektorový prostor nad tělesem \mathcal{T} a f, g zobrazení $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, nazveme **součtem zobrazení** f a g zobrazení $(f + g) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ takové, že

$$(f + g)(x) = f(x) \oplus g(x)$$

pro všechna $x \in D(f) \cap D(g) \subset \mathcal{M}$; pro ostatní $x \in \mathcal{M}$ obraz $(f + g)(x)$ nedefinujeme.

Lineární zobrazení

Definice L7.3: Jsou-li $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus_{\mathcal{U}}, \otimes_{\mathcal{U}})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{N}, \oplus_{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{V}})$ vektorové prostory nad (stejným) tělesem \mathcal{T} a f zobrazení $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, řekneme, že zobrazení f je **lineární**, když

$$f((\alpha \otimes_{\mathcal{U}} \mathbf{u}) \oplus_{\mathcal{U}} (\beta \otimes_{\mathcal{U}} \mathbf{v})) = (\alpha \otimes_{\mathcal{V}} f(\mathbf{u})) \oplus_{\mathcal{V}} (\beta \otimes_{\mathcal{V}} f(\mathbf{v}))$$

pro každé dva vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} z množiny \mathcal{M} a každá dvě čísla α, β z tělesa \mathcal{T} .

Lineární zobrazení je takové zobrazení mezi vektorovými prostory X a Y , které zachovává vektorové operace sčítání a násobení skalárem. Název lineární je odvozen z faktu, že grafem lineárního zobrazení z reálných čísel do reálných čísel je přímka.

Aditivní a homogenní zobrazení

- $\alpha = \beta = 1$:

Definice L7.4: Zobrazení f je **aditivní**, když

$$f(\mathbf{u} \oplus_{\mathcal{U}} \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) \oplus_{\mathcal{V}} f(\mathbf{v}) \quad (1)$$

pro každé dva vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} z množiny \mathcal{M} .

- $\beta = 0$:

Definice L7.5: Zobrazení f je **homogenní**, když

$$f(\alpha \otimes_{\mathcal{U}} \mathbf{u}) = \alpha \otimes_{\mathcal{V}} f(\mathbf{u}) \quad (2)$$

pro každý vektoru $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ a každé $\alpha \in \mathcal{T}$.

Věta L7.1: Je-li zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ současně aditivní i homogenní, pak je lineární.

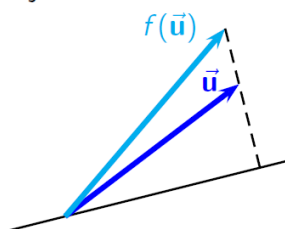
Příklady lineárních zobrazení

Už víme, že lineárními zobrazeními jsou ta, která jsme použili jako inspiraci:

- Násobení matice $m \times n$ vektory z \mathcal{T}^n je lineárním zobrazením $\mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}^m$
- Přiřazení souřadnic v dané bazi k vektoru z n -rozměrného prostoru \mathcal{V} je lineárním zobrazením $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}^n$
- i opačné přiřazení vektoru z n -rozměrného prostoru \mathcal{V} k souřadnicím v dané bazi je lineární zobrazení $\mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{V}$
- obecně každý izomorfismus dvojice vektorových prostorů \mathcal{U}, \mathcal{V} je lineárním zobrazením, a to jak $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, tak $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.
- identita na libovolném vektorovém prostoru \mathcal{V} (množině jeho vektorů) je lineární zobrazení $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$.

Na prostoru orientovaných úseček v rovině jsou lineárními zobrazeními například

- otočení vektoru o pevně daný úhel
- „přitažení“ vektoru k dané přímce – rozměr vektoru ve směru kolmém na přímku se změní q -krát



Obrázek: Protažení

- průmět vektoru ve směru přímky q na přímku p

Na funkčních prostorech jsou lineárními zobrazeními například

- násobení funkce danou pevnou funkcí $n(x) \in C(\mathcal{R})$:

$$N : C(\mathcal{R}) \rightarrow C(\mathcal{R}) : [N(f)](x) = n(x) \cdot f(x)$$

pro každé $x \in \mathcal{R}$

- derivace funkce chápaná jako funkce

$$D : C^1(\mathcal{R}) \rightarrow C(\mathcal{R}) : [D(f)](x) = f'(x)$$

pro každé $x \in \mathcal{R}$

- sada (uspořádaná) hodnot funkce ve vybraných bodech x_1, x_2, \dots, x_n :

$$H : C(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{R}^n : H(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$$

Vlastnosti definičního oboru

Věta L7.2: Je-li $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus_{\mathcal{U}}, \otimes_{\mathcal{U}})$ a zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ lineární, pak $(W(f), \oplus_{\mathcal{U}}, \otimes_{\mathcal{U}})$ je podprostor v \mathcal{U} .

Vlastnosti oboru hodnot

Věta L7.3: Je-li $\mathcal{V} = (\mathcal{N}, \oplus_{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{V}})$ a zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ lineární, pak $(W(f), \oplus_{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{V}})$ je podprostor v \mathcal{V} .

Důležitou charakteristikou vektorového prostoru je jeho dimenze; ta má v případě oboru hodnot lineárního zobrazení svoje pojmenování:

Definice L7.6: *Hodností* lineárního zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ nazýváme dimenzi jeho oboru hodnot $h(f) = \dim(W(f))$.

Jádro lineárního zobrazení

Definice L7.7: Je-li $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ a zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je lineární, nazveme množinu všech vektorů z \mathcal{U} , jejichž obrazem je nulový vektor

$$\ker(f) = \{\mathbf{x} \in D(f) : f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}$$

jádrem lineárního zobrazení f .



(jádro = všechny vektory z \mathcal{U} jejichž obrazem je nulový vektor)

Věta L7.4: Jádro lineárního zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je podprostor v \mathcal{U} .

Operace s lineárními zobrazeními

Linearita lineární kombinace

Věta L7.5: Jsou-li \mathcal{U}, \mathcal{V} vektorové prostory nad tělesem \mathcal{T} a f, g lineární zobrazení $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, pak pro libovolná čísla γ, δ z \mathcal{T} je zobrazení

$$h = [\gamma \otimes f \oplus \delta \otimes g] : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$$

lineární.

Linearita složeného zobrazení

Věta L7.6: Jsou-li $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ vektorové prostory nad tělesem \mathcal{T} a $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineární zobrazení, pak složené zobrazení

$$h = g \circ f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$$

Linearita inverzního zobrazení

Věta L7.7: Jsou-li \mathcal{U}, \mathcal{V} vektorové prostory nad tělesem \mathcal{T} a f prosté lineární zobrazení $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, pak inverzní zobrazení $f^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ je také lineární.

Souvislost s řešením soustav lineárních rovnic

Pokud při řešení soustavy Gaussovou eliminační metodou dostaneme například matici

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

není soustava řešitelná (obsahuje rovnici $0 = 1$, které nevyhovuje žádné $\mathbf{x} \in \mathcal{T}^n$).

Současně to znamená, že původní vektor $\mathbf{b} \in \mathcal{T}^m$ nebyl v oboru hodnot násobení maticí \mathbf{A} , tj. nebyl lineární kombinací jejích sloupců.

V soustavě rovnic (po Gaussově eliminaci)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

musíme zvolit dvě neznámé jako parametry (nejlépe $x_5 = t$ a $x_3 = s$). Pak dopočítáme

$$x_4 = 2 - 2t, \quad x_2 = 1 + 3x_4 + x_5 = 7 - 5t$$
$$x_1 = 3 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = -11 + 12t + 3s$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -11 + 12t + 3s \\ 7 - 5t \\ s \\ 2 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Určení jádra soustavy Gaussovou eliminací:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -11 + 12t + 3s \\ 7 - 5t \\ s \\ 2 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Kdybychom řešili homogenní rovnici – to by byla soustava rovnic s nulovou pravou stranou – dostali bychom stejný výsledek až na část neobsahující parametry $(-11, 7, 0, 2, 0)^T$.

Část řešení obsahující parametry je tedy jádrem soustavy rovnic, vektory $(3, 0, 1, 0, 0)^T$ a $(12, -5, 0, -2, 1)^T$ tvoří jeho (možnou) bazi.

Vektor $\mathbf{x}_p = (-11, 7, 0, 2, 0)^T$ je partikulárním řešením soustavy.

10. Maticová reprezentace lineárního zobrazení

Souřadnice vektoru v bázi

Baze vektorového prostoru $\mathcal{V} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ nad tělesem \mathcal{T} je taková množina $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$, že každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ je možno vyjádřit jednoznačně jako lineární kombinaci vektorů z \mathcal{E} .

Je-li počet prvků baze (=dimenze prostoru \mathcal{V}) konečný, nazýváme koeficienty této lineární kombinace **souřadnicemi** vektoru \mathbf{u} **v bazi** \mathcal{E} .

Zapisujeme je jako $\mathbf{u}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ a znamená to, že

$$\mathbf{u} = \bigoplus_{j=1}^n (u_j \otimes \mathbf{e}_j)$$

Vlastnosti souřadnic

Jsou-li \mathcal{E}, \mathcal{F} různé baze prostoru \mathcal{V} , existuje matice přechodu $I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ od baze \mathcal{E} k bazi \mathcal{F} taková, že

$$\mathbf{u}^{\mathcal{F}} = I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{E}}$$

- pokud známe matici přechodu, můžeme pomocí ní a vektoru jedné báze vypočítat vektor druhé báze

Lineární zobrazení a jeho vlastnosti

Jsou-li $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus_{\mathcal{U}}, \otimes_{\mathcal{U}})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{N}, \oplus_{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{V}})$ vektorové prostory nad tělesem \mathcal{T} a f zobrazení $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, řekneme, že zobrazení f je **lineární**, když

$$f((\alpha \otimes_{\mathcal{U}} \mathbf{u}) \oplus_{\mathcal{U}} (\beta \otimes_{\mathcal{U}} \mathbf{v})) = \alpha \otimes_{\mathcal{V}} f(\mathbf{u}) \oplus_{\mathcal{V}} \beta \otimes_{\mathcal{V}} f(\mathbf{v})$$

pro každé dva vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} z množiny \mathcal{M} a každá dvě čísla α, β z tělesa \mathcal{T} .

Z lineárních zobrazení se dají vytvářet jejich lineární kombinace, dají se skládat, můžou existovat zobrazení k nim inverzní – všechna výsledná zobrazení jsou rovněž lineární (mezi odpovídajícími prostory).

Významné množiny vektorů

Je-li $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$, $\mathcal{V} = (\mathcal{N}, \oplus_{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{V}})$, a zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je lineární, je

- definiční obor $D(f)$ podprostorem v \mathcal{U}
- obor hodnot $W(f)$ podprostorem ve \mathcal{V}

Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vzoru

Matice $\mathbf{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, kterou jsme vytvořili, se nazývá **maticovou reprezentací (lineárního) zobrazení f v bazích \mathcal{E} a \mathcal{F}** . Protože jsme při její konstrukci nenarazili na žádná omezení, můžeme tvrdit, že

Věta L8.1: Jsou-li $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus_{\mathcal{U}}, \otimes_{\mathcal{U}})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{N}, \oplus_{\mathcal{V}}, \otimes_{\mathcal{V}})$, konečněrozměrné vektorové prostory, $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ a $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$ jejich baze a $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je lineární, $D(f) = \mathcal{M}$, pak existuje taková matice $\mathbf{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, že

$$\left(f(\mathbf{u}) \right)^{\mathcal{F}} = \mathbf{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{E}}$$

pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$.

Maticová reprezentace lineárního zobrazení je tedy nástrojem, který dovoluje převádět hledání obrazů vektorů na číselné operace, a příslušným výpočetním prostředkem je násobení matice vektorem.

Konstrukce maticové reprezentace

Tato charakteristika prvků f_{ij} je současně návodem na vytvoření maticové reprezentace $\mathbf{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ zobrazení f :

- 1) Najdeme obrazy $f(\mathbf{e}_j)$ všech vektorů baze \mathcal{E}
- 2) určíme jejich souřadnice v $f(\mathbf{e}_j)^{\mathcal{F}}$ v bazi \mathcal{F}
- 3) a tyto souřadnicové vektory (ve správném pořadí) uspořádáme do matice.

Příklady maticových reprezentací:

Identita

Maticovou reprezentací identity ve stejných bazích je tedy jednotková matice:

$$\mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \mathbf{I}$$

Rotace orientované úsečky

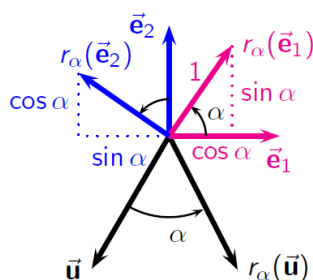
- Při výpočtu $(\mathbf{R}_{\alpha})_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$
- 1) najdeme obraz $r_{\alpha}(\mathbf{e}_1)$
 - 2) a jeho souřadnice

$$(r_{\alpha}(\mathbf{e}_1))^{\mathcal{E}} = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$$

- 3) totéž uděláme s vektorem \mathbf{e}_2

$$(r_{\alpha}(\mathbf{e}_2))^{\mathcal{E}} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$$

Výsledek: $(\mathbf{R}_{\alpha})_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$



Obrázek: Otočení vektoru

Operace se zobrazeními

Lineární kombinace

$$\mathbf{H}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \alpha \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} + \beta \cdot \mathbf{G}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$$

tedy maticová reprezentace lineární kombinace zobrazení je lineární kombinací maticových reprezentací původních zobrazení (ve stejných bazích) se stejnými koeficienty.

Složené zobrazení

$$\mathbf{H}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \mathbf{G}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

tedy maticová reprezentace složeného zobrazení je součinem maticových reprezentací jednotlivých zobrazení – v přesně definovaném pořadí, zápis součinu odpovídá zápisu složeného zobrazení a pořadí zobrazení při konstrukci výsledku je zprava doleva.

Vytvoření maticové reprezentace složeného zobrazení je hlavním aplikačním výstupem operace násobení matic.

Př.: Složením otočení orientované úsečky nejdřív o úhel α a pak o úhel β , dostaneme díky složenému zobrazení otočení o úhel $\alpha + \beta$.

$$(\mathbf{R}_{\alpha+\beta})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{R}_{\alpha+\beta} = \mathbf{R}_{\beta} \cdot \mathbf{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

→ z toho plynou součtové vzorce se sin a cos

Inverzní zobrazení

$$(\mathbf{F}_{inv})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (\mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1}$$

($(\mathbf{F}_{inv})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ zobrazení f^{-1})

Mají-li tedy prostory \mathcal{U} , \mathcal{V} stejnou konečnou dimenzi a zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ definované všude na \mathcal{U} je prosté, pak

- f je reprezentováno regulární maticí $\mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ (v libovolných bazích \mathcal{A} , \mathcal{B})
- f^{-1} je reprezentováno maticí $(\mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1}$

To je hlavním argumentem pro používání pojmu *inverzní matice*.

Změna matice při změně bazí

Obecná situace

Obecně můžeme počítat se dvěma bazemi \mathcal{A} , \mathcal{E} prostoru \mathcal{U} a dvěma bazemi \mathcal{B} , \mathcal{F} prostoru \mathcal{V} .

Má-li lineární zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ definované pro všechny vektory $z \in \mathcal{U}$ známou maticovou reprezentaci $F_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, pak při oznažení $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ bude pro každý vektor \mathbf{u} z prostoru \mathcal{U}

$$\mathbf{v}^{\mathcal{F}} \stackrel{\text{přechod do baze } \mathcal{B}}{=} \mathbf{I}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{v}^{\mathcal{B}} \stackrel{\text{výpočet obrazu}}{=} \mathbf{I}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{A}} =$$
$$\stackrel{\text{přechod do baze } \mathcal{E}}{=} \mathbf{I}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{E}}$$

současně je

$$\mathbf{v}^{\mathcal{F}} = \mathbf{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{E}}$$

a vzhledem k jednoznačnosti maticové reprezentace

$$\mathbf{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \mathbf{I}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}} = \mathbf{I}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot (\mathbf{I}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}})^{-1}$$

poslední forma vychází z toho, že matice přechodů do bazí \mathcal{E} , \mathcal{F} známe.

Dodatek

Definice L9.1: Počet lineárně nezávislých sloupců matice se nazývá *hodnotí matice*.

11. Lineární zobrazení vektorového prostoru do sebe

Pokud $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ je vektorový prostor, můžeme uvažovat i o zobrazeních z množiny \mathcal{M} znovu do množiny \mathcal{M} (je to dokonce velmi časté, například identita, otáčení orientovaných úseček, derivování funkcí).

Takováto zobrazení nazýváme **zobrazeními vektorového prostoru do sebe** nebo také **endomorfismy** na daném vektorovém prostoru.

Možnosti díky tomu, že vzory i obrazy jsou ze stejného vektorového prostoru:

- zobrazení můžeme skládat samo se sebou,
- můžeme porovnávat vzory a jejich obrazy přímo pomocí vektorových operací

Mocnina a mnohočlen endomorfismu

Definice L9.2: Pro zobrazení $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ definujeme

- 1 $f^0 = i$ (identita)
- 2 $f^n = f(f^{n-1})$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

a vytvořená zobrazení nazýváme (n -tými) **mocninami** zobrazení f .

Mocninou se snažíme vystihnout to, že pro přirozená n je

$$f^n = \underbrace{f(f(\dots f(f)))}_{n\text{-krát}}$$

Pokud se omezíme na nezáporné mocniny dostaneme ekvivalent mnohočlenu

Definice L9.3: Pro vektorový prostor $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ nad tělesem \mathcal{T} , zobrazení $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ a mnohočlen

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

s koeficienty z tělesa \mathcal{T} definujeme **mnohočlen** P_n ze zobrazení f jako zobrazení

$$P_n(f) = \bigoplus_{j=0}^n (a_j \otimes f^j)$$

Mnohočleny ze zobrazení mají široké použití především v úlohách, které se týkají časového vývoje některých veličin.



Vlastní vektor lineárního zobrazení

Definice L9.4: Je-li $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ vektorový prostor nad tělesem \mathcal{T} a f je lineární zobrazení $: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, nazveme **vlastním vektorem** zobrazení f **nenulový** vektor \mathbf{u} takový, že existuje číslo $\lambda \in \mathcal{T}$, pro které je

$$f(\mathbf{u}) = \lambda \otimes \mathbf{u}$$

Číslo λ pak nazýváme **vlastním číslem** nebo **vlastní hodnotou** zobrazení f .

(Nulový vektor vylučujeme, protože pro ten platí $f(\mathbf{o}) = \lambda \otimes \mathbf{o} = \mathbf{o}$ pro každé číslo λ)

Pokud je \mathbf{u} vlastním vektorem daného zobrazení, je k němu jednoznačně přiřazeno vlastní číslo; vlastní čísla pro různé vlastní vektory (stejněho) lineárního endomorfismu mohou být různá.

Triviální zobrazení

Vlastním vektorem lineárního zobrazení vektorového prostoru do sebe, které každému vektoru přiřadí nulový vektor, je libovolný **nenulový vektor** z daného prostoru:

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{o} = 0 \otimes \mathbf{u}$$

vlastním číslem tohoto zobrazení je pro všechny vlastní vektory **nula**.

Vlastním vektorem identity na prostoru \mathcal{U} je libovolný **nenulový vektor** z \mathcal{U}

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} = 1 \otimes \mathbf{u}$$

vlastním číslem identického zobrazení je pro všechny vlastní vektory **jednička**.

Číslo λ bude vlastním číslem endomorfismu f pouze tehdy, když $\ker(f_\lambda) \neq \{0\}$.

Hlavní vektor

Definice L9.5: Je-li $\mathcal{U} = (\mathcal{M}, \oplus, \otimes)$ vektorový prostor nad tělesem \mathcal{T} , f je lineární zobrazení: $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ s vlastním číslem λ a vlastním vektorem $\mathbf{u}^{(0)}$, nazveme **hlavním vektorem** zobrazení f řádu k vektor $\mathbf{u}^{(k)}$ takový, že

$$f(\mathbf{u}^{(k)}) = \lambda \otimes \mathbf{u}^{(k)} \oplus \mathbf{u}^{(k-1)}$$

Rovnice pro vlastní vektor

Při hledání vlastních čísel a vektorů můžeme vektory popsat jejich souřadnicemi v bazi \mathcal{E} ; přitom vztah

$$f(\mathbf{u}) = \lambda \otimes \mathbf{u}$$

je ekvivalentní vztahu pro souřadnice

$$\mathbf{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{E}} = \lambda \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{E}}$$

Protože násobení čtvercovou maticí $\mathbf{F}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ je lineárním zobrazením $\mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}^n$, mluvíme v této souvislosti o *vlastních číslech* a *vlastních vektorech* matic.

Elementární metody hledání vlastních čísel a vektorů

Matice 3x3 (GEM s parametrem)

Při hledání vlastních čísel matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

postupujeme podobně:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\lambda &= \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ -4 & 5-\lambda & -3 \\ -4 & 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \\ \text{výměna řádků} &\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 & -3-\lambda \\ -1-\lambda & 2 & -1 \\ -4 & 5-\lambda & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \\ [2] - \frac{1+\lambda}{4}[1] &\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 & -3-\lambda \\ 0 & 2-(1+\lambda) & -1+\frac{3+\lambda}{4}(1+\lambda) \\ [3] - [1] & 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} \\ [3] - [2] &\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 & -3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1+\frac{3+\lambda}{4}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & \frac{4-(3+\lambda)(1+\lambda)}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matici s nejvýše dvěma nenulovými řádky dostaneme vždy, když bude aspoň jeden z diagonálních prvků nulový, to nastane, právě když bude nulový jejich součin:

$$(1-\lambda)(1-4\lambda-\lambda^2) = 0$$

Tato rovnice vyžaduje nalezení kořene mnohočlenu, který se nazývá **charakteristickým mnohočlenem matice**. jeho stupeň je vždy roven rozměru matice.

Následuje výpočet vlastního vektoru ze získané matice \mathbf{A}_λ

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -3 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & -1 + \frac{3+\lambda}{4}(1 + \lambda) \\ 0 & 0 & \frac{4-(3+\lambda)(1+\lambda)}{4} \end{pmatrix}$$

Jejími vlastním číslem je bezpochyby jednička (kořen charakteristického polynomu). Pro tuto hodnotu λ řešíme soustavu rovnic s maticí (dosadíme $\lambda = 1$)

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -3 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & -1 + \frac{3+\lambda}{4}(1 + \lambda) \\ 0 & 0 & \frac{4-(3+\lambda)(1+\lambda)}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \quad \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnotu u_2 musíme zvolit jako parametr $u_2 = t$, pak

$$u_3 = 0, \quad 4u_1 + 4u_2 = 0 \rightarrow u_1 = u_2 = t$$

a vektor $\mathbf{u} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ je vlastním vektorem matice \mathbf{A} s vlastním

číslem 1.



12. Determinant

Různé definice

- 1) Poměr mezi vzory a obrazy obrazce v rovnoběžníkové síti
- 2) Determinant složeného zobrazení je roven součinu determinantů jednotlivých zobrazení
 $\det(g \circ f) = \det(f) \cdot \det(g)$
- 3) V prostorech můžeme lineární endomorfismus f reprezentovat maticí $\mathbf{F}_\mathcal{E}$ v nějaké bazi \mathcal{E} a hodnotu determinantu zobrazení přiřadit této matici.

Mluvíme pak o **determinantu matice**.

- 4) **Hlavní definice:** Vlastnosti poměru objemů těles $f(\Omega)$ a Ω v prostoru geometrických vektorů pro lineární zobrazení $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ reprezentované maticí \mathbf{F} můžeme zobecnit na libovolné čtvercové matice

Definice L10.1: Je-li \mathbf{A} čtvercová číselná matice, pak zavádíme **determinant matice \mathbf{A}** jako číslo $\det(\mathbf{A})$, které má následující vlastnosti:

- Determinant matice, která má ve všech poddiagonálních nebo ve všech naddiagonálních prvcích nuly, je roven součinu jejích diagonálních prvků
- Pro každé dvě matice \mathbf{A}, \mathbf{B} je $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$

V této definici je skrytý i návod na výpočet determinantu jakékoliv matice.

Někdy označujeme determinant matice pomocí ohraničení matice svíslými

čarami: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Metody výpočtu determinantu

Násobením řádku

Dostaneme-li matici \mathbf{A}' vydělením všech prvků jednoho řádku matice \mathbf{A} číslem α , je

$$\det(\mathbf{A}') = \frac{1}{\alpha} \det(\mathbf{A}), \quad \det(\mathbf{A}) = \alpha \det(\mathbf{A}')$$

to se dá interpretovat tak, že „společného dělitele všech prvků jednoho řádku matice můžeme vytknout před determinant“

Násobení řádku matice číslem – pokud to není jenom za účelem přičtení tohoto násobku k jinému řádku – vyžaduje značnou opatrnost:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 * [2] - 3 * [1] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

Pokud to jde, stačí v matici vždy vytknout – pak jen ponásobíme čísla na diagonále s vytknutými čísly

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 & -243 \\ 0 & 1 & -5 & 19 & -65 & 211 \\ 0 & 2 & -8 & 26 & -80 & 242 \\ 0 & 4 & -8 & 28 & -80 & 244 \\ 0 & 5 & -5 & 35 & -65 & 275 \\ 0 & 6 & 0 & 54 & 0 & 486 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 & -243 \\ 0 & 1 & -5 & 19 & -65 & 211 \\ 0 & 1 & -4 & 13 & -40 & 121 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -20 & 61 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -13 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 81 \end{vmatrix}$$

Následky výměny řádků matice pro determinantu

Výměna čísel a , b , nebo i vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} se dá ale provést následovr

- 1 přičteme první vektor k druhému: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$
- 2 (nový) druhý vektor odečteme od prvního:
 $(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) \rightarrow (-\mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$
- 3 (nový) první vektor přičteme k druhému:
 $(-\mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) \rightarrow (-\mathbf{b}, \mathbf{a})$
- 4 první vektor vynásobíme (-1) : $(-\mathbf{b}, \mathbf{a}) \rightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{a})$

Všechny potřebné gaussovské matice mají determinanty jedna, s výjimkou posledního, který je -1 .

\implies výměna řádků matice změní znaménko determinantu

Vzorec pro matici 2x2

Při výpočtu determinantu $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ Gaussovou eliminací dostaneme

- pokud $a \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = [2] - \frac{c}{a}[1] \quad \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{vmatrix} = a \left(d - \frac{bc}{a} \right) = ad - bc \quad (1)$$

- pokud $a = 0$, ale $c \neq 0$, vyměníme řádky, tím se obrátí znaménko determinantu, dál ale použijeme stejný postup:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -(cb - ad) = ad - bc$$

- v případě $a = c = 0$ máme už pod diagonálou nuly, součin diagonálních prvků je také nulový, a nulovou hodnotu má i výraz, který jsme dostali v prvních dvou případech

Vzorec (1) platí tedy pro všechny matice 2×2 .

Vzorec pro matici 3x3

Při vytváření vzorce pro výpočet determinantu matice 3×3 budeme předpokládat, že potřebné diagonální prvky jsou nenulové:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} &= \begin{matrix} [2] - \frac{d}{a}[1] \\ [3] - \frac{g}{a}[1] \end{matrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e - \frac{bd}{a} & f - \frac{cd}{a} \\ 0 & h - \frac{bg}{a} & k - \frac{cg}{a} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{matrix} [3] - \frac{ah-bg}{ae-bd}[2] \end{matrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & \frac{ae-bd}{a} & \frac{af-cd}{a} \\ 0 & 0 & \frac{ak-cg}{a} - \frac{ah-bg}{ae-bd} \frac{af-cd}{a} \end{vmatrix} = \\ &= a \cdot \frac{ae-bd}{a} \cdot \frac{(ak-cg)(ae-bd) - (ah-bg)(af-cd)}{a(ae-bd)} = \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} &= \frac{(ak-cg)(ae-bd) - (ah-bg)(af-cd)}{a} = \\ &= aek + dhc + gbf - ceg - afh - bdk \end{aligned}$$

Nebo dle vzorce:

3x3 : $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Rozvoj podle řádku

(spíš zmínit, než tomu až moc rozumět)

$$a_{nj} \sum_{\pi \in P(n), \pi(n)=j} (-1)^{p(\pi)} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i, \pi(i)}$$

V součtu se ve zbytcích součinnů prvků matice objevují prvky všech prvních $n-1$ řádků matice a všech sloupců matice kromě j -tého, tedy ty, které se používají při výpočtu determinantu matice \mathbf{A}_{nj}^* , kterou dostaneme y matice \mathbf{A} vyškrtnutím n -tého řádku a j -tého sloupce.

Podrobnější rozbor parit permutací vede k výsledku

$$\sum_{\pi \in P(n), \pi(n)=j} (-1)^{p(\pi)} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i, \pi(i)} = (-1)^{n+j} \det(\mathbf{A}_{nj}^*),$$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{nj} \det(\mathbf{A}_{nj}^*)$$

Tento návod se nazývá **rozvojem determinantu podle (n -tého) řádku**.

Permutační cestou

(aspoň vědět že to existuje)

Věta L10.1: Je

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in P(n)} (-1)^{p(\pi)} \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}$$

π zde představuje jednotlivé permutace z množiny $P(n)$ všech permutací n prvků a $p(\pi)$ je parita permutace.

13. Skalární součin

Definice

Pro \mathcal{R} čísla

Definice L10.2: Je-li \mathcal{U} vektorový prostor nad tělesem \mathcal{T} , nazveme zobrazení, které každé dvojici vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} z \mathcal{U} přiřazuje číslo z tělesa \mathcal{T} : $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = t \in \mathcal{T}$ **skalárním součinem** na prostoru \mathcal{U} , pokud

($\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ je skalární vynásobení vektorů)

- 1 $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \oplus \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle$ pro každou trojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ z \mathcal{U}
- 2 $\langle \mathbf{u} | \alpha \otimes \mathbf{v} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ pro každou dvojici vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} z \mathcal{U} a každé číslo $\alpha \in \mathcal{T}$
- 3 $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle (=) \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle$ pro každou dvojici vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} z \mathcal{U}
- 4 $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \geq 0$ pro každý vektor \mathbf{u} , z \mathcal{U} ; navíc $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{o}$

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷

V komplexních prostorech je skalární součin závislý na pořadí vektorů

- 1a $\langle \mathbf{u} \oplus \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle$ pro každou trojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ z \mathcal{U}
- 2a $\langle \alpha \otimes \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \bar{\alpha} \cdot \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ pro každou dvojici vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} z \mathcal{U} a každé číslo $\alpha \in \mathcal{T}$

Vlastnosti

Skalární součin vektoru s vektory mezi kterými je vektorový součet si nadále zachová aditivitu, a skalární součin vektoru s vektory mezi kterými je vektorový součin si nadále zachová komutativnost

Vektory jsou při skalárním součinu rovnocenné (násobí se jejich velikost) $\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Velikost vektoru: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Norma a skalární součin

Definice L10.3: Je-li na vektorovém prostoru \mathcal{U} zavedený skalární součin $\langle \cdot | \cdot \rangle$, zavádíme **normu** vektoru \mathbf{u} jako

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle}$$

Z axiomu 4 vyplývá, že norma je definovaná pro každý vektor, a jediný vektor, který má nulovou normu (velikost), je nulový vektor.

- Norma umožňuje měřit **vzdálenost** (definuje metriku):
Vzdálenost mezi vektory x a y z lineárního vektorového prostoru s normou $\|\cdot\|$ je kladné číslo $\|x - y\|$.
- Skalární součin umožňuje měřit **úhel**: Úhel θ mezi dvěma nenulovými vektory x a y .

Ortogonalita

Vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} z tělesa \mathcal{T} , kde \mathcal{T} je skalární součin, jsou ortogonální (kolmé) pokud je jejich vektorový součin roven 0.

Báze B se nazývá ortogonální (kolmou), jestliže jsou všechny vektory z báze na sebe kolmé.

Báze B se nazývá ortonormální, pokud je ortogonální a všechny vektory mají velikost 1 (součin vektorů je tedy 1 pro všechny stejné vektory a 0 pro všechny různé vektory).

Ortogonální matice je matice, jejíž transponovaná matice je současně maticí inverzní.

Výpočet skalárního součinu vektorů pomocí souřadnic

Standardní varianta v R^n :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n); \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Standardní varianta v C^n :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n); \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \overline{x_1} \cdot y_1 + \overline{x_2} \cdot y_2 + \dots + \overline{x_n} \cdot y_n$$

Velikost, norma vektoru

Na prostoru L se skalárním součinem je definována velikost vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ z prostoru L jako číslo $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$, toto číslo se značí $\|\vec{x}\|$, tzn.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Odchylka vektorů

Pro všechny vektory \vec{x}, \vec{y} z prostoru L je odchylka definována jako číslo $\phi \in \langle 0; \pi \rangle$, pro které platí

$$\cos \phi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

V lineární algebře, dva vektory \mathbf{v} a \mathbf{w} v prostoru s definovaným skalárním součinem jsou ortonormální, pokud jsou ortogonální a mají jednotkovou délku, tedy platí: $\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = 0$ a zároveň $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$.

Gramův-Schmidtův algoritmus

Je založen na principu matematické indukce. Popisuje konstrukci ortogonální množiny, v jejímž lineárním obalu leží daná množina vektorů G . Málo efektivní pro vytváření velkých ortogonálních množin. Ukázka na příkladu:

Úloha: Vytvořte ortogonální bazi lineárního obalu množiny vektorů $\{(1, 2, 2, 0), (2, 2, 6, 1), (1, -9, 4, 1)\}$ při standardním skalárním součinu

Řešení: Do hledané množiny zařadíme první vektor přímo:

$$\mathbf{f}_1 = (1, 2, 2, 0).$$

V dalších výpočtech budeme potřebovat druhou mocninu jeho normy. Je

$$\|\mathbf{f}_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

Vektor \mathbf{f}_2 vytvoříme pomocí druhého ze zadaných vektorů podle návodu

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 &= (2, 2, 6, 1) - \frac{\langle \mathbf{f}_1 | (2, 2, 6, 1) \rangle}{\|\mathbf{f}_1\|^2} \mathbf{f}_1 = \\ &= (2, 2, 6, 1) - \frac{\langle (1, 2, 2, 0) | (2, 2, 6, 1) \rangle}{9} (1, 2, 2, 0) = && \rightarrow \text{tedy } \mathbf{f}_2 = (0, -2, 2, 1) \text{ a} \\ &= (2, 2, 6, 1) - \frac{18}{9} (1, 2, 2, 0) = (2, 2, 6, 1) - (2, 4, 4, 0) = (0, -2, 2, 1) && \|\mathbf{f}_2\|^2 = (-2)^2 + 2^2 + 1^2 = 9 \end{aligned}$$

Dále zaměstnáme třetí vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 &= (1, -9, 4, 1) - \frac{\langle \mathbf{f}_1 | (1, -9, 4, 1) \rangle}{\|\mathbf{f}_1\|^2} \mathbf{f}_1 - \frac{\langle \mathbf{f}_2 | (1, -9, 4, 1) \rangle}{\|\mathbf{f}_2\|^2} \mathbf{f}_2 = \\ &= (1, -9, 4, 1) - \frac{-9}{9} (1, 2, 2, 0) - \frac{27}{9} (0, -2, 2, 1) = \\ &= (1, -9, 4, 1) - (-1, -2, -2, 0) - (0, -6, 6, 3) = (2, -1, 0, -2) \end{aligned}$$

Hledaná ortogonální množina tedy $\mathcal{F} = \{(1, 2, 2, 0), (0, -2, 2, 1), (2, -1, 0, -2)\}$

14. Optimální aproximace

Vektor z podprostoru nejbliže danému vektoru

Aproximace

Slouží k přibližnému určení vektoru, pomocí vektoru, který je „dostatečně blízko“.

Dostatečně blízko: Znamená to, že uvažovaný vektor \mathbf{u} se od náhradního vektoru \mathbf{u}_V liší o velmi malý vektor:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_V \oplus \delta_{\mathbf{u}}, \quad \|\delta_{\mathbf{u}}\| \leq \text{dané } \varepsilon$$

Náhradní vektor \mathbf{u}_V hledáme zpravidla v nějakém konečněrozměrném podprostoru V daného prostoru U .

Řešitelnost

Věta L11.2: Je-li U vektorový prostor se skalárním součinem, $V \subset U$ jeho úplný podprostor a vektor $\mathbf{u} \in U$, pak existuje právě jeden vektor $\mathbf{u}_V \in V$ takový, že

$$\|\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}_V)\| \leq \|\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{v})\|$$

pro všechny vektory $\mathbf{v} \in V$.

Velikost odchylky

Dle vzorce: $\|\delta_{\mathbf{u}}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}_V\|^2$

(Pythagorova věta). Vektor odchylky a \mathbf{u}_V jsou na sebe kolmé. Jedná se o odečtení mocnin uvažovaného vektoru \mathbf{u} a náhradního vektoru \mathbf{u}_V sloužícího k aproximaci.

Výpočet velikosti aproximace

Známe-li už souřadnice u_i hledaného přiblížení v bazi \mathcal{G} , známe i toto přiblížení a můžeme spočítat

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_V\|^2 &= \langle \mathbf{u}_V | \mathbf{u}_V \rangle = \left\langle \bigoplus_{i=1}^n (u_i \otimes \mathbf{g}_i) \middle| \bigoplus_{j=1}^n (u_j \otimes \mathbf{g}_j) \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle u_i \otimes \mathbf{g}_i | u_j \otimes \mathbf{g}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{u}_i \langle \mathbf{g}_i | \mathbf{g}_j \rangle u_j = \\ &= \langle \mathbf{u}^{(\mathcal{G})} | \mathbf{u}^{(\mathcal{G})} \rangle_{\mathbf{G}} \end{aligned}$$

což je druhá mocnina normy souřadnicového vektoru $\mathbf{u}^{(\mathcal{G})}$ při skalárním součinu s metrikou \mathbf{G}

Fourierovy řady

Přiblížení vektoru \mathbf{u} v podprostoru \mathcal{V}_j je dáno vztahem

$$\mathbf{u}_{\mathcal{V}_j} = \sum_{i=1}^j \frac{\langle \mathbf{g}_i | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{g}_i\|^2} \mathbf{g}_i$$

Platí-li Parsevalova rovnost, lze odchylku $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{V}_j}$ libovolně zmenšit (volbou dostatečně velkého j), což se dá vyjádřit v podobě

$$\mathbf{u} = \sum_{i \geq 1} \frac{\langle \mathbf{g}_i | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{g}_i\|^2} \mathbf{g}_i$$

Tento vztah se nazývá *Fourierovou řadou* vektoru \mathbf{u} v ortogonální bazi \mathcal{G} a „souřadnice“ $u_i = \frac{\langle \mathbf{g}_i | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{g}_i\|^2}$ se označují jako *Fourierovy koeficienty* vektoru \mathbf{u} v bazi \mathcal{G} .

Nejčastější využití Fourierových řad nacházíme při aproximaci funkcí.



15. Matematická indukce

Množiny

- **Sjednocení množin** \mathcal{A}, \mathcal{B} je množina $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, která obsahuje všechny prvky, které náležejí alespoň do jedné z množin \mathcal{A}, \mathcal{B} .
- **Průnik množin** \mathcal{A}, \mathcal{B} je množina $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, která obsahuje všechny prvky, které náležejí do obou množin \mathcal{A}, \mathcal{B} .
- **Rozdíl množin** \mathcal{A}, \mathcal{B} je množina $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, která obsahuje všechny prvky, které náležejí do množiny \mathcal{A} a nenáležejí do množiny \mathcal{B} .
- **Doplňěk množiny** \mathcal{A} je množina \mathcal{A}^C , která obsahuje všechny prvky, které nenáležejí do množiny \mathcal{A} .

Můžeme tedy psát například $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^C$

Princip matematické indukce

Věta 1: Jestliže množina $M \subset \mathbb{N}$

- Obsahuje číslo 1,
- z toho že nějaké $n \in M$ vyplývá, že i $n + 1 \in M$,

pak $M = \mathbb{N}$

Pokud vynecháme požadavek $M \subset \mathbb{N}$ (tedy připustíme, že bude obsahovat i jiná než přirozená čísla, pak bude $\mathbb{N} \subset M$. To se používá především tehdy, když potřebujeme zkoumat množinu rozšířit o některé hodnoty, například o nulu.

→ tvrzení dokážeme pro nějaký první prvek (v přirozených číslech to nejčastěji je $n = 1$). To dokážeme prostým dosazením. V dalším, indukčním, kroku dokážeme implikaci „pokud tvrzení platí pro $n = a$, pak platí i pro $n = a + 1$ “

Použití

Využívá se při důkazu tvrzení, která se mají týkat libovolných přirozených čísel.

Indukční předpoklad = platnost tvrzení $T(n)$

Vzorový příklad

Dokažte, že platí pro každé přirozené n , že $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$

1) Když $n = 1$, pak $T(1) : 1 = 1^2$ (pro poslední člen nalevo je při $n = 1$ roven $2 \cdot 1 - 1 = 1$)

→ pro jedničku tedy tvrzení platí

2) Pokud tedy tvrzení platí pro nějaké n , pak na levé straně dané rovnosti dostaneme tvrzení $T(n+1)$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 + 2(n + 1) - 1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 + 2n + 1$$

→ využijeme platnost tvrzení $T(n)$ (= indukční předpoklad)

$$= n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

→ a to znamená, že tvrzení T platí i pro číslo $n + 1$, tedy $n + 1 \in \mathcal{M}$ a množina \mathcal{M} je rovna množině všech přirozených čísel

16. Základní pravidla kombinatoriky

Kombinatorika

Zabývá se úlohami, které vedou na stanovení počtu množin s nějakými danými vlastnostmi (počet většinou konečný, ale vysoký).

K symbolice:

- počet prvků množiny M značíme symbolem $|M|$
- množiny s prázdným průnikem se nazývají *disjunktivní*

Pravidlo součinu

Věta 3: (Pravidlo součinu) Jsou-li \mathcal{A} , \mathcal{B} libovolné množiny, pak pro množinu všech uspořádaných dvojic

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a, b) : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

platí

$$|\mathcal{A} \times \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$$

Věta má smysl pro konečné množiny, pokud je některá z nich nekonečná, pak je výsledek také nekonečný.

Př.: Kolika způsoby mohu udělat dvojice z 10 žen a 10 mužů? První ženě vyberu jednoho z deseti, druhé jednoho z devíti, třetí jednoho z osmi, tzn $10!$.

Pravidlo součtu

Věta 4: (Pravidlo součtu) Jsou-li $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ navzájem disjunktivní množiny (tj. $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$ pro libovolnou dvojici $i \neq j$), pak platí

(= velikost sjednocení všech disjunktivních množin \mathcal{A} od 1 do n je roven součtu jejich velikostí)

$$\left| \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i \right| = |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + \dots + |\mathcal{A}_n| = \sum_{i=1}^n |\mathcal{A}_i|$$

Dirichletův princip

(využijeme ho, pokud máme známou velikost sjednocení disjunktních množin a hledáme, jak velké mohou tyto množiny být)

Věta 5: Jsou-li $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ navzájem disjunktní množiny a k jejich sjednocení má celkem k prvků, pak existuje množina \mathcal{A}_i ($1 \leq i \leq n$) taková, že

$$|\mathcal{A}_i| \geq \left\lceil \frac{k-1}{n} \right\rceil + 1$$

kde symbol $[x]$ znamená celou část čísla x , tedy největší celé číslo, které nepřesahuje hodnotu x
(Je tedy například $[2] = 2$, $[2,99] = 2$.)

Princip inkluze a exkluze

Pomáhá určit počet sjednocení prvků množin, když je množin více, jsou konečné a nejsou disjunktní (tedy dvě množiny mohou mít společné prvky)

Pro dvojici množin: $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$

(velikost sjednocení = velikostem množin – velikosti jejich průniku)

Pro tři množiny: $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{C}| - |\mathcal{B} \cap \mathcal{C}| + |\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}|$

Pro vícero množin:
$$\left| \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \right|$$

17. Kombinatorické výpočty

Variace bez opakování

Uvažujeme množinu \mathcal{M} o n prvcích ($|\mathcal{M}| = n$)

Definice D2.2: Variací k -té třídy z n prvků bez opakování nazýváme každou uspořádanou k -tici navzájem různých prvků množiny \mathcal{M} .

(Někdy se místo „z n prvků“ používá obratu „na $(n-k)$ -prvkové množině \mathcal{M} “)

Za různé se považují takové variace, které se liší aspoň na jedné pozici.

Počet všech variací k -té třídy z n prvků bez opakování je

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ činitelů}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(Variace: „Z množiny vybíráme počet objektů, záleží na pořadí.“)

Elementárně:

Na první pozici libovolný z n prvků, na druhou o jeden méně, tedy $n-1$, na další zase o jeden méně...

a protože vytváříme k -tice, měly by se jednotlivé příspěvky vynásobit.

Variace s opakováním

Definice D2.3: Variací k -té třídy z n prvků (nebo také na $(n$ -prvkové) množině \mathcal{M}) s opakováním nazýváme každou uspořádanou k -tici prvků z množiny \mathcal{M} .

Za různé se považují takové variace, které se liší aspoň na jedné pozici.

Počet všech variací k -té třídy z n prvků s opakováním je

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Ekvivalentní množiny

Definice D2.1: Množiny \mathcal{A} , \mathcal{B} nazveme ekvivalentní, (píšeme $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$),

pokud existuje prosté zobrazení e množiny \mathcal{A} na množinu \mathcal{B} (tj. $D(e) = \mathcal{A}$, $W(e) = \mathcal{B}$).

Pro ekvivalentní množiny je $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$

Faktoriál

Faktoriál z přirozeného čísla n definujeme jako součin

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Permutace bez opakováním

Uvažujeme množinu \mathcal{M} o n prvcích ($|\mathcal{M}| = n$)

Definice D2.4: Permutací n prvků bez opakování (nebo také permutací řádu n) nazýváme každou uspořádanou n -tici navzájem různých prvků množiny \mathcal{M} .

Permutace řádu n jsou tedy speciálním případem variací bez opakování – variace n -té třídy z n prvků.

Počet všech permutací řádu n je

$$P(n) = A_n^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n!$$

(Permutace: „Z množiny n chceme určit počet všech možných n -tic.“)

- platí $(n-n)! = 0! = 1$

Parita

Definice D2.5: *Paritou* permutace nazýváme charakteristiku počtu transpozic, které potřebujeme k jejímu vytvoření. Je-li tento počet sudý, mluvíme o *sudých* permutacích, v opačném případě o *lichých* permutacích.

Permutace s opakováním

Definice D2.6: Je-li $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ n -prvková množina a k_1, k_2, \dots, k_n přirozená čísla, nazveme každou uspořádanou $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ -tici prvků z \mathcal{M} , která obsahuje každý prvek m_j právě k_j -krát, *permutací n prvků s opakováním* řádu (k_1, k_2, \dots, k_n) .

Například: $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 1$, permutací uvedeného typu může být (b, a, b, b, c, a, b) .

Počet všech permutací s opakováním řádu (k_1, k_2, \dots, k_n) značíme $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$, nebo také P_{k_1, k_2, \dots, k_n} a je

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

Kombinace bez opakování

Uvažujeme množinu \mathcal{M} o n prvcích ($|\mathcal{M}| = n$)

Definice D2.7: *Kombinací k -té třídy z n prvků* (nebo také na n -prvkové množině \mathcal{M}) *bez opakování* nazýváme každou neuspořádanou k -tici (navzájem různých) prvků množiny \mathcal{M} .

(Kombinace: „Vybíráme z množiny objekty, nezáleží na pořadí.“)

Dvě kombinace považujeme za různé, pokud se liší ve výskytu některého prvku.

Počet kombinací k -té třídy z n prvků bez opakování budeme značit C_n^k .

$$C_n^k = P(k, n - k) = \frac{(k + n - k)!}{k!(n - k)!} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Tato hodnota se nazývá také *kombinační číslo*, zapisujeme ho ve tvaru

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!} = \binom{n}{n - k}$$

a čteme „ n nad k “



- za n do vzorce vždy dosadíme vrchní číslo nebo čísla a za k vždy spodní

Kombinace s opakováním

Uvažujeme množinu \mathcal{M} o n prvcích ($|\mathcal{M}| = n$)

Definice D2.8: *Kombinací k -té třídy z n prvků* (nebo také na n -prvkové množině \mathcal{M}) *s opakováním* nazýváme každou neuspořádanou k -tici prvků množiny \mathcal{M} , které se mohou vyskytovat **v libovolném množství exemplářů** (samozřejmě ne větším než k)

Dvě kombinace považujeme za různé, pokud se liší v počtu exemplářů některého prvku.

Počet kombinací k -té třídy z n prvků s opakováním budeme značit \overline{C}_n^k .

Předpokládáme, že prvek m_j je ve vybrané k -tici zastoupen k_j -krát. Nezáleží na pořadí, takže k -tici můžeme reprezentovat tak, že nejdřív vezmeme k_1 prvků m_1 , pak umístíme k_2 prvků m_2 , ...

$$\underbrace{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k_1\text{-krát}}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{k_2\text{-krát}}, \dots}_{k \text{ prvků}}$$

Vložení oddělovačů:

$$\underbrace{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k_1\text{-krát}}, o, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{k_2\text{-krát}}, o, \dots}_{k + n - 1 \text{ pozic}} \quad n - 1 \text{ oddělovačů}$$

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Některé vztahy kombinačních čísel

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad \text{pro každé } n \in \mathcal{N}_0$$

$$\binom{n}{n+m} = 0 \quad \text{pro každé } m \in \mathcal{N}$$

$$\binom{0}{k} = 0 \quad \text{pro každé } k \in \mathcal{N}$$

Pascalův trojúhelník a Pascalova identita

Kombinační čísla $\binom{n}{k}$ můžeme srovnat do tabulky (Pascalův trojúhelník)

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	0	...
5	1	5	10	10	5	1	0	...
6	1	6	15	20	15	6	1	...
								...

– vypadá to, že každý prvek je součtem prvků v předcházejícím řádku, které se nacházejí ve stejném a předcházejícím sloupci.

Věta D3.1 (Pascalova identita): Pro každá dvě $k, n \in \mathcal{N}$ platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Kombinatorické identity

Věta D3.4 (Vandermondova identita): Pro každá tři $k, m, n \in \mathcal{N}$ platí

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0} \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \dots = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

(Některé příspěvky v součtu napravo mohou být, například při $m < k$ a $i > m$, nulové.)

Věta D3.5 : Pro každá dvě $k, n \in \mathcal{N}$ platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j}{k-1}$$

- součet kombinačních čísel se stejným rozsahem k

(Sčítání počínající $\binom{0}{k-1}$ je rovnocenné se sčítáním od $\binom{k-1}{k-1}$, nadbytečné členy jsou stejně nulové.)

Věta D3.3: Pro každé $n \in \mathcal{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Věta D3.4 : Pro každé $n \in \mathcal{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots = 0 \quad \text{- při střídání znamének}$$

Binomická věta

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Tento výsledek (vzorec) se označuje jako **binomická věta**.

Kombinační čísla se v této souvislosti označují také jako **binomické koeficienty**.

Binomická věta je zobecněním klasických vzorců typu $(a + b)^2$ za pomoci kombinačních technik.

Multinomická věta

Výsledkem je **multinomická věta**

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{j_m \geq 0 \\ j_1 + j_2 + \dots + j_k = n}} \frac{n!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_k!} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_k^{j_k}$$

Hodnoty počtů permutací s opakováním $\frac{n!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_k!}$ se někdy označují také jako **multinomické koeficienty**.

Platí pro libovolná x_1, x_2, \dots, x_k a přirozené n , kde se součet provádí přes všechny uspořádané k -tice přirozených čísel (n_1, \dots, n_r) , jejichž součet je roven n . Slouží např. k výpočtu součtu součinů kombinačních čísel.

Zobecněná kombinační čísla

Z návodu na výpočet kombinačního čísla

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n(n-1) \dots (n-k+1)}^{k \text{ činitelů}}}{k!}$$

nevyplyvá žádné omezení pro číslo n . Můžeme tedy zavést **zobecněná kombinační čísla** jako

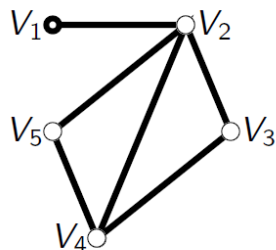
$$\binom{r}{k} = \frac{\overbrace{r(r-1) \dots (r-k+1)}^{k \text{ činitelů}}}{k!}$$

pro libovolné reálné r a nezáporné celé k .

Graf se dá popsat i **maticí susednosti**, to je taková matice \mathbf{S} , pro kterou je

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud dvojice } (V_i, V_j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

Například grafu



odpovídá
matice
susednosti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obrázek: běžný graf

Matice susednosti normálního grafu je symetrická, $s_{ij} = s_{ji}$.

Definice D4.12: V grafu $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ nazveme **stupněm vrcholu** $V \in \mathcal{V}$ počet hran, se kterými je incidentní.

Zápis: $\deg(V) = |\{U : \{V, U\} \in \mathcal{E}\}|$

V grafu na obrázku je například

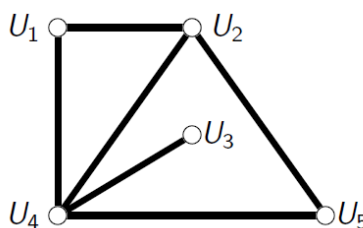
$$\deg(U_1) = 2$$

$$\deg(U_2) = 3$$

$$\deg(U_3) = 1$$

$$\deg(U_4) = 4$$

$$\deg(U_5) = 2$$



Obrázek: Graf \mathcal{G}_3

Součet všech stupňů vrcholů je vždy sudý (protože hrana má dva konce).

Vstupní stupeň je počet hran které do vrcholu vstupují.

Výstupní stupeň je počet vycházejících hran – výstupní stupeň a vstupní stupeň jsou si rovny.

Definice D4.13: V grafu $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ nazveme jeho **skórem** libovolně uspořádanou posloupnost stupňů jeho vrcholů.

Havlův algoritmus

Algoritmus D4.1: (Havlův algoritmus)

- 1 (Některý z) vrchol(ů) s **nejvyšším aktuálním stupněm** spojíme tolika hranami, kolik je jeho stupeň, s vrcholy, **jejichž aktuální stupeň jsou největší** (je-li jich dostatečný počet),
- 2 Ve vybraném vrcholu stupeň anulujeme, v připojených ho snížíme o 1,
- 3 pokračujeme krokem 1) pro nové skóre.

Graf existuje, pokud dosáhneme skóre $(0, 0, \dots, 0)$. Není-li v některém okamžiku krok 1) možný, graf se zadaným skóre neexistuje.

Příklad: Zjistěte, jestli $(4, 4, 3, 2, 1)$ je skóre nějakého grafu.

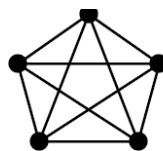
Řešení:

(4	4	3	2	1)
(4	4	3	2	1)
(0	3	2	1	0)
(0	3	2	1	0)

Graf neexistuje, protože pro vrchol stupně 3 jsou k dispozici už jenom dva vrcholy s nenulovými stupni.

Speciální typy grafů

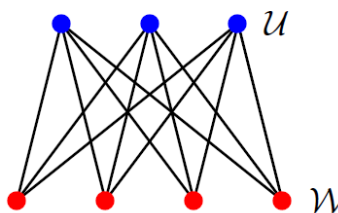
Úplný graf K_n je graf, který má n vrcholů a množina jeho hran obsahuje všechny přípustné dvojice vrcholů, jeho počet hran je $|\mathcal{E}| = \binom{n}{2}$.



Obrázek: Graf K_5

- každý bod má hranu s každým bodem

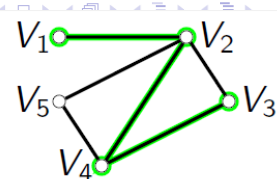
Bipartitní graf je takový, že jeho množinu vrcholů \mathcal{V} můžeme rozdělit na disjunktní části \mathcal{U} , \mathcal{W} tak, že má pouze hrany $e_{ij} = (U_i, W_j)$, $U_i \in \mathcal{U}$, $W_j \in \mathcal{W}$.



Obrázek: Graf $K_{3,4}$

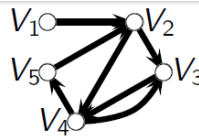
Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ je bipartitní graf, pro který $|\mathcal{U}| = m$, $|\mathcal{W}| = n$ a množina jeho hran obsahuje všechny přípustné dvojice vrcholů (jeho počet hran je $|\mathcal{E}| = mn$).

Graf $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ nazveme **podgrafem** grafu $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, pokud $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ a $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$. Píšeme $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$.



Obrázek: $\hat{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$

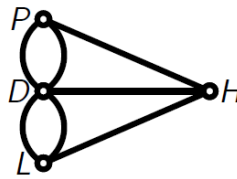
V **orientovaném** grafu jsou hranami **uspořádané** dvojice vrcholů; uspořádání se geometricky znázorňuje orientovanými úsečkami.



(hrany tvoří vektory - „šipky“)

Obrázek: orientovaný graf

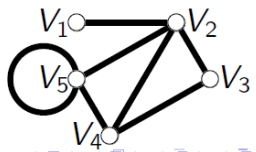
V **multigrafu** se připouští, aby též dvojici vrcholů odpovídalo více hran – množina hran tedy není množinou dvojic vrcholů, ale každé hraně je dvojice vrcholů jednoznačně přiřazená.



(smyčky mezi vrcholy)

Obrázek: Multigraf

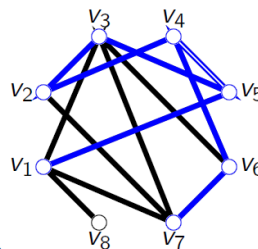
Pseudograf může obsahovat i hrany, které odpovídají dvojici stejných vrcholů (smyčky)



(smyčka na jednom vrcholu)

Souvislost grafů

Definice D5.1: **Sled** v grafu $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ je taková posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_s, v_s)$, že každá hrana $e_j = (v_{j-1}, v_j)$.



Obrázek: Sled

(= posloupnost vrcholů taková, že mezi každými dvěma po sobě jdoucími je hrana)

Pokud v grafu na obrázku označíme

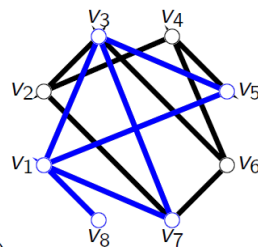
$e_1 = (v_1, v_3)$, $e_2 = (v_1, v_5)$, $e_3 = (v_1, v_7)$
 $e_4 = (v_1, v_8)$, $e_5 = (v_2, v_3)$, $e_6 = (v_2, v_4)$, $e_7 = (v_2, v_7)$, $e_8 = (v_3, v_5)$
 $e_9 = (v_3, v_6)$, $e_{10} = (v_3, v_7)$, $e_{11} = (v_4, v_5)$, $e_{12} = (v_4, v_6)$, $e_{13} = (v_6, v_7)$

bude sledem posloupnost

$(v_7, e_{13}, v_6, e_{12}, v_4, e_{11}, v_5, e_8, v_3, e_5, v_2, e_6, v_4, e_{11}, v_5, e_2, v_1)$

Je-li \mathcal{U} množina vrcholů sledu a \mathcal{H} množina jeho hran, je $(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$.

Definice D5.2: **Tah** v grafu $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ je takový sled, který obsahuje každou hrana z \mathcal{E} nejvýše jednou.



Obrázek: Tah

Pokud v grafu na obrázku označíme

$e_1 = (v_1, v_3)$, $e_2 = (v_1, v_5)$, $e_3 = (v_1, v_7)$
 $e_4 = (v_1, v_8)$, $e_5 = (v_2, v_3)$, $e_6 = (v_2, v_4)$, $e_7 = (v_2, v_7)$, $e_8 = (v_3, v_5)$
 $e_9 = (v_3, v_6)$, $e_{10} = (v_3, v_7)$, $e_{11} = (v_4, v_5)$, $e_{12} = (v_4, v_6)$, $e_{13} = (v_6, v_7)$

bude tahem posloupnost

$(v_8, e_4, v_1, e_3, v_7, e_{10}, v_3, e_1, v_1, e_2, v_5, e_8, v_3)$

Definice D5.3: *Eulerovský tah* je takový tah v grafu, který obsahuje každou hranu grafu právě jednou.

Definice D5.4: *Uzavřený eulerovský tah* je takový eulerovský tah v grafu, jehož koncový vrchol splývá s počátečním.

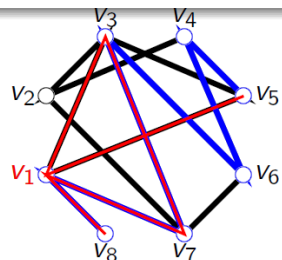
Definice D5.5: *Eulerovský graf* je takový graf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský tah.

V eulerovském tahu je každý vrchol s výjimkou prvního a posledního incidentní se dvěma přilehlými hranami, při vícenásobném výskytu vrcholu je celkový počet hran, které jsou v tahu s daným vrcholem incidentní, sudý (hrany se v grafu neopakují).

Definice D5.6: *Cesta* v grafu $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ je takový tah, který obsahuje každý vrchol z \mathcal{V} nejvýše jednou.

(Mluvíme o cestě z prvního vrcholu do posledního)

Pokud v grafu na obrázku označíme



Obrázek: Cesta

$e_1 = (v_1, v_3)$, $e_2 = (v_1, v_5)$, $e_3 = (v_1, v_7)$
 $e_4 = (v_1, v_8)$, $e_5 = (v_2, v_3)$, $e_6 = (v_2, v_4)$, $e_7 = (v_2, v_7)$, $e_8 = (v_3, v_5)$
 $e_9 = (v_3, v_6)$, $e_{10} = (v_3, v_7)$, $e_{11} = (v_4, v_5)$, $e_{12} = (v_4, v_6)$, $e_{13} = (v_6, v_7)$

bude cestou z v_8 do v_5 posloupnost

$(v_8, e_4, v_1, e_3, v_7, e_{10}, v_3, e_9, v_6, e_{12}, v_4, e_{11}, v_5)$

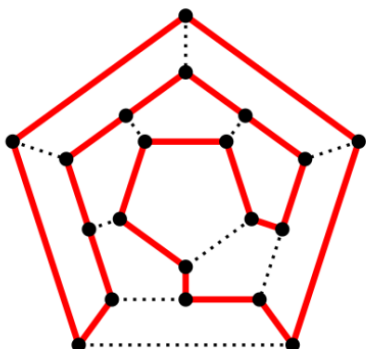
ale cestou nebude posloupnost

$(v_8, e_4, v_1, e_3, v_7, e_{10}, v_3, e_1, v_1, e_2, v_5)$



Definice D5.12: *Hamiltonovou kružnicí* v grafu $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ nazveme takovou kružnici, která prochází všemi jeho vrcholy.

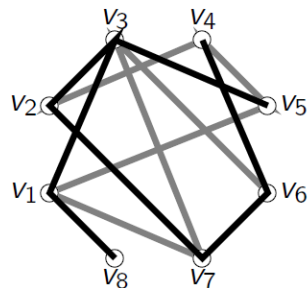
Definice D5.13: Graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ je *hamiltonovský*, pokud v něm existuje hamiltonovská kružnice.



Kružnice (též cyklus) označuje takový graf, který se skládá z jediného cyklu – tedy uzavřené posloupnosti spojených vrcholů. Kružnice může být orientovaná i neorientovaná.

19. Ohodnocené grafy

Definice D5.14: *Kostrou grafu* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ nazýváme libovolný podgraf $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}, \mathcal{E}') \subset \mathcal{G}$, který je stromem.



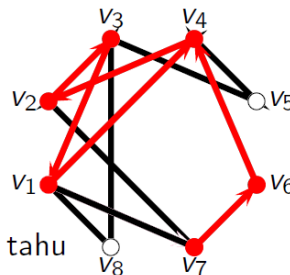
Obrázek: Kostra grafu

Strom je graf, který je souvislý a neobsahuje žádnou kružnici.

Eulerovský tah – Fleuryho algoritmus

Požadavek sudosti stupňů všech vrcholů je nejen nutnou podmínkou (bez jejího splnění to není možné) existence eulerovského tahu v grafu, ale i pro souvislé grafy i podmínkou postačující: Každý souvislý graf, jehož všechny vrcholy mají sudé stupně, je eulerovský.

Tvrzení se dokazuje přímou konstrukcí eulerovského tahu (*Fleuryho algoritmus*), a to i neuzavřeného.



1) Najdeme (jeden ze dvou) vrcholů lichého stupně

2a) zbývá-li jediná hrana, zařadíme ji do tahu
2b) nebo vybereme hrana, která není mostem

3) a odstraníme ji z původního grafu **Obrázek:** Fleuryho algoritmus pokračujeme dalším vrcholem (ten má teď lichý stupeň)

(* most je hrana, která nepatří do žádné kružnice)

Nejkratší cesta

V hranově ohodnocených grafech je každé hraně e_i přiřazena nezáporná reálná hodnota h_i nazvaná *ohodnocení hrany*, například vzdálenost mezi dvěma místy nebo doba potřebná k jejímu překonání.

Běžnou úlohou je *nalezení nejkratší cesty mezi vrcholy u, v* to je

taková cesta $(u, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v)$, pro kterou je $\sum_{i=1}^k h_i$

minimální.

Cestu lze nahradit sledem – sled ve kterém se nějaký sled opakuje bude mít vyšší hodnotu.

Problém obchodního cestujícího

V hranově ohodnoceném grafu $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ najít uzavřený sled, který obsahuje všechny vrcholy z \mathcal{V} , a součet jeho hranových ohodnocení je nejmenší.

Hledání nejkratší cesty

Ohodnocení vrcholů

Hledání nejkratší cesty mezi vrcholy u, v se postupuje následovně:

- 1 výchozímu vrcholu u přiřadíme ohodnocení $f(u) = 0$, všem ostatním vrcholům nedosažitelně velké ohodnocení $f(v_j)$, například součet ohodnocení všech hran v grafu + 1.
- 2 Definujeme množiny použitých a nepoužitých hran a vrcholů, popřípadě množinu zařazených hran. Všechny vrcholy a hrany zařadíme do množiny nepoužitých.

Po těchto přípravných krocích následuje samotné hledání.

Minimalizace ohodnocení vrcholů

- 1 V množině nepoužitých vrcholů vybereme ten vrchol m , jehož ohodnocení je nejmenší (v prvním kroku je to vrchol u).
- 2 pro všechny nepoužité hrany (m, v_i) určíme nová ohodnocení vrcholů

$$[f(v_i)]_{new} = \min([f(v_i)]_{old}, f(m) + h(m, v_i)) \quad (1)$$

- 3 vrchol m a všechny hrany, které z něj vycházejí, přeřadíme do použitých
- 4 hrany, s jejichž pomocí jsme dosáhli minima v (1), zařadíme mezi zařazené, zařazené hrany, které předtím incidovaly s vrcholem v_i , ze zařazených odstraníme
- 5 dokud mezi použitými vrcholy není cílový vrchol v , pokračujeme krokem 1).

Ohodnocení cílového vrcholu určuje hledanou nejkratší vzdálenost a zařazené hrany definují nejkratší cestu.



Matrice sousednosti

Slouží k najítí nejkratší cesty mezi všemi vrcholy současně. Definujeme matici \hat{S} tak, že

$$\hat{s}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \\ h(v_i, v_j) & \text{pokud hrana } (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \\ \text{nedosažitelná hodnota} & \text{jindy} \end{cases}$$

a operace „sčítání“ $a \oplus b = \min(a, b)$

a „násobení“ $a \odot b = a + b$

Má-li graf n vrcholů, najdeme nejkratší cestu mezi vrcholy v_i, v_j jako prvek matice $(\hat{S}^{n-1})_{ij}$ při takto zavedeném sčítání a násobení. 60

Minimální kostra grafu

Minimální kostra má minimum hran. V praxi lze poznatky o ní vytvořit např. při tvorbě sítí rozvodu elektřiny, tam je ale taky třeba vzít v potaz omezení terénu.

Algoritmy

Odebírací Kruskalův algoritmus je následující:

- 1 hrany srovnáme sestupně podle ohodnocení, všechny jsou na začátku nepoužité
- 2 nepoužitou hranu s nejvyšším ohodnocením:
 - odebereme, pokud je cyklická (v aktuálním grafu)
 - přeřadíme mezi použité, pokud je acyklická
- 3 opakujeme tak dlouho, dokud nezbyvají nepoužité hrany.

Vytříděné použité hrany jsou množinou hran hledané minimální kostry grafu.

Borůvkův algoritmus

Algoritmus v každém svém kroku propojí každou komponentu s jinou komponentou pomocí nejkratší možné hrany. Jelikož Borůvkův algoritmus vyžaduje, aby měly všechny hrany unikátní váhu, tak při propojení komponent nikdy nemůže vzniknout cyklus.

20. Číselné posloupnosti

Definice D6.1: *Posloupnost* $(\mathbf{a}) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ je zobrazení z množiny přirozených čísel do dané množiny \mathcal{M} . Prvek $a_j \in \mathcal{M}$ je obrazem čísla $j \in \mathcal{N}$ a nazýváme ho j -tým členem posloupnosti.

U posloupnosti navíc zpravidla vyžadujeme, aby v ní „nebyly díry“, tedy aby její definiční obor obsahoval s každým číslem $n \in \mathcal{N}$ i číslo $n - 1$ (pokud $n \neq 1$). Toho se dá dosáhnout ve dvou případech – $D(\mathbf{a}) = \{1, 2, \dots, n\}$, nebo $D(\mathbf{a}) = \mathcal{N}$.

Množina prvků posloupnosti může být obecně libovolná, v rámci diskrétní matematiky se budeme zabývat číselnými posloupnostmi.

(posloupnost = řada objektů, konečná či nekonečná, s opakujícími či neopakujícími prvky)

Je-li $D(\mathbf{a}) = \{1, 2, \dots, n\}$, mluvíme o *konečné* (n -prvkové) posloupnosti

$$(\mathbf{a}) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{zkráceně } (a_i)_{i=1}^n$$

Pokud $D(\mathbf{a}) = \mathcal{N}$, řekneme o posloupnosti

$$(\mathbf{a}) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = \text{zkráceně } (a_i)_{i \geq 1}$$

že je *nekonečná*.

V nekonečných posloupnostech jsme schopni určit kterýkoliv člen (n -tý), a to dvěma způsoby:

1) Přímým vztahem pořadí členu a jeho hodnotu: $a_n = f(n)$. Zde jsou členy vyjádřeny explicitně (např. $a_n = n^2$, $a_n = 1$)

Definice D6.2: O posloupnosti $(a_i)_{i \geq 1}$ řekneme, že je definovaná rekurentně, pokud

$$a_k = f(k, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}) \quad (1) \text{ (rekurentní = definuje člen na základě znalosti jiného)}$$

pro každé $k > n_0$. Konečnou část posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{n_0}$, pro kterou platnost (1) neočekáváme, pak můžeme definovat výčtem hodnot a_1, a_2, \dots, a_{n_0} . Tomuto výčtu říkáme počáteční podmínky.

Příklady rekurentních posloupností

- Posloupnost (\mathbf{a}) : $a_j = 1$ se dá definovat rekurentně jako

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} \text{ pro } n > 1$$

je možná i plná rekurence

$$a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - (n-2)$$

tato rekurence nepotřebuje ani žádnou počáteční podmínku

- Rekurentní je i definice posloupnosti faktoriálů $a_n = n!$

$$a_1 = 1, \quad a_n = n \cdot a_{n-1} \text{ pro } n > 1$$

Na množině nekonečných posloupností z tělesa \mathcal{T} zavádíme operace sčítání posloupností $(\mathbf{a}) = (a_i)_{i \geq 1}$ a $(\mathbf{b}) = (b_i)_{i \geq 1}$ jako posloupnost

$$(\mathbf{c}) = (\mathbf{a}) \oplus (\mathbf{b}) = (c_i = a_i + b_i)_{i \geq 1}$$

a pro číslo $\alpha \in \mathcal{T}$ α -násobek posloupnosti jako posloupnost

$$(\mathbf{c}) = \alpha \otimes (\mathbf{a}) = (c_i = \alpha \cdot a_i)_{i \geq 1}$$

Prostor nekonečných posloupností nemá bazi, protože není splněn konečný počet násobků daných vektorů.

Lineární zobrazení na prostoru posloupností

Částečný součet

V matematické analýze je významným zobrazením $\mathcal{S}(\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T})$ **částečný součet** posloupnosti

$$s_n(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n a_i$$

a zobrazení s , které posloupnosti (\mathbf{a}) přiřazuje posloupnost $(\mathbf{s}) = s(\mathbf{a})$ jejich částečných součtů

$$s_i = \sum_{j=1}^i a_j$$

Lineární zobrazení prostoru nekonečných posloupností do sebe:

Je-li $(\mathbf{c}) = (c_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{S}(\mathcal{T})$ pevně daná posloupnost, je zobrazení $n_{(\mathbf{c})} : \mathcal{S}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{T})$ definované tak, že

$$n_{(\mathbf{c})}(\mathbf{a}) = (\mathbf{d}) = (c_i \cdot a_i)_{i \geq 1}$$

lineární.

Posunutí:

Zobrazení p , které posloupnosti (\mathbf{a}) přiřadí posloupnost $(\mathbf{b}) = p(\mathbf{a})$ s prvky

$$b_i = a_{i+1}$$

nazveme **posunutí** posloupnosti – posunutou posloupnost můžeme dostat „odstraněním prvního členu“. I toto zobrazení je lineární.

Diference:

Při popisu vývoje systémů popsaných posloupnostmi hraje významnou roli zobrazení, které se nazývá **diference** (značíme ho obvykle Δ). Definujeme

$$\Delta(\mathbf{a}) = p(\mathbf{a}) - (\mathbf{a})$$

takže

$$[\Delta(\mathbf{a})]_i = a_{i+1} - a_i$$

je rozdíl sousedních prvků (následujícího a aktuálního) posloupnosti.

Vzorec pro diferenci vyšších řádů:

$$[\Delta^n(\mathbf{a})]_i = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a_{i+n-j}$$

Konečná rekurence:

Definice D.3: O posloupnosti (a) řekneme, že je definována **rekurentním vztahem k -tého řádu**, pokud

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \quad (1)$$

pro každé $n > k$.

Rekurentní vztah (1) se nedá použít k výpočtu hodnot a_i pro $i = 1, 2, \dots, k$. Těchto k počátečních podmínek musíme zadat přímým výčtem. Zbývající členy posloupnosti jsou už dány vztahem (1) jednoznačně.

Diferenční rovnice

Diferenční rovnice je rovnice pro neznámou posloupnost obsahující její diference.

Příklad: Vztah

$$a_n = 2a_{n-1} - 1 \quad (2)$$

je rekurentním vztahem prvního řádu; ze vzorce pro první diferenci

$$[\Delta(\mathbf{a})]_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$

vypočítáme

$$a_n = a_{n-1} + [\Delta(\mathbf{a})]_{n-1}$$

a dosadíme do (2):

$$\begin{aligned} a_{n-1} + [\Delta(\mathbf{a})]_{n-1} &= 2a_{n-1} - 1 \\ [\Delta(\mathbf{a})]_{n-1} &= a_{n-1} - 1 \\ [\Delta(\mathbf{a})]_n &= a_n - 1 \end{aligned}$$

Diferenční rovnice k -tého řádu vyžaduje také zadání k počátečních podmínek.



Lineární závislost na předcházejících členech

Je-li v rekurentním vztahu k -tého řádu

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$$

funkce f lineární funkcí parametrů a_j pro $j = n - k, n - k + 1, \dots, n - 1$

$$f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) = \sum_{j=1}^k c_j(n) a_{n-j} + b(n)$$

kde $b(n)$, $c_j(n)$ jsou libovolné funkce pořadového čísla n , nazýváme vztah

$$a_n = \sum_{j=1}^k c_j(n) a_{n-j} + b(n)$$

lineárním rekurentním vztahem řádu k . V této definici navíc požadujeme, aby funkce $c_k(n)$ nebyla identicky nulová.

Řešení rekurentních vztahů

Lineární rekurentní vztah zapsaný v podobě lineárního zobrazení posloupnosti (\mathbf{a})

$$\sum_{j=0}^k n_{(c_j^*)} (p^{k-j}(\mathbf{a})) = -(\mathbf{b}^*)$$

zobrazuje posloupnost (\mathbf{a}) , která je předmětem našeho zájmu, na definovanou posloupnost (\mathbf{b}) . Klíčovou roli hraje (lineární) zobrazení

$$L(\mathbf{a}) = \sum_{j=0}^k n_{(c_j^*)} (p^{k-j}(\mathbf{a}))$$

Formulace úlohy v podobě $L(\mathbf{a}) = -\mathbf{b}^*$ má tu přednost, že v příznivých případech dovoluje najít explicitní vyjádření členů posloupnosti (\mathbf{a}) . To nazýváme **řešením rekurentního vztahu**; pro nelineární rekurentní vztahy je taková úloha řešitelná zcela výjimečně.

Homogenní rekurentní vztahy

Dalším krokem při řešení úlohy je nalezení jádra zobrazení L , tedy řešení homogenní rovnice $L(\mathbf{a}) = -(\mathbf{0})$.

Věta D6.1: Jádro zobrazení

$$L(\mathbf{a}) = \sum_{j=0}^k n_{(c_j^*)} (p^{k-j}(\mathbf{a}))$$

má dimenzi k .

Důkaz: Posloupnosti $(\mathbf{k}_1), (\mathbf{k}_2), \dots, (\mathbf{k}_k)$ definované tak, že

$$(k_j)_i = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro ostatní } i \leq k, i \neq j \\ \sum_{m=1}^k c_m(n)(k_j)_{i-m} & \text{pro } i > k \end{cases}$$

jsou z jádra L a jsou lineárně nezávislé.



Partikulární řešení

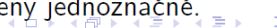
Při partikulárním řešení úlohy (\mathbf{a}_p) a kanonické bazi $\{(\mathbf{k}_j)\}_{j=1}^k$ použité v důkazu věty o dimenzi jádra bude

$$(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}_p) + \sum_{j=1}^k \alpha_j (\mathbf{k}_j)$$

Jsou-li dány počáteční podmínky, pak pro prvních k členů posloupnosti bude platit

$$a_m = (a_p)_m + \sum_{j=1}^k \alpha_j (k_j)_m = (a_p)_m + \alpha_m$$

koeficienty α_m pro $m = 1, 2, \dots, k$ jsou tedy určeny jednoznačně.



21. Řešení lineárních rekurentních vztahů

U nekonečných posloupností vyžadujeme, aby se dal najít (vypočítat) libovolný člen. Toho se dá dosáhnout dvěma cestami:

- Pomocí přímého vztahu mezi pořadím členu posloupnosti a jeho hodnotou: $a_n = f(n)$ (**explicitní vzorec**), nebo
- pomocí předcházejících členů posloupnosti (a pořadí členu):

$$a_k = f(k, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}) \text{ pro každé } k > n_0$$

O takovéto posloupnosti řekneme, že je definovaná **rekurentně**. Konečnou část posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{n_0}$, pro kterou platnost vzorce neočekáváme, pak definujeme výčtem hodnot a_1, a_2, \dots, a_{n_0} . Tomuto výčtu říkáme **počáteční podmínky**.

Lineární rekurentní vztahy s konstantními koeficienty

Zavedení

Posloupnost $(a_n)_{n \geq 1}$ často popisuje vývoj hodnot sledované veličiny A v diskrétních časech t_n , $n = 1, 2, \dots$. Rekurentní vztah k -tého řádu

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n), \quad n > k$$

pak vyjadřuje závislost hodnoty veličiny v čase $t = n$ na její nedávné historii popsané hodnotami $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$ a na vnějších vlivech, zahrnutých v přímé závislosti na okamžiku n .

Řada systémů se vyznačuje tím, že jejich závislost na historii se nemění v čase, pak má rekurence podobu

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) + b(n), \quad n > k$$

a je-li rekurence lineární (což je také velmi časté), pak

$$a_n = \sum_{j=1}^k c_j a_{n-j} + b(n), \quad n > k$$

Tuto závislost nazýváme **lineárním rekurentním vztahem řádu k s konstantními koeficienty** (předpokládáme $c_k \neq 0$)

Tento výraz lze následovně přepsat:

$$i = k - j, \quad c_i^* = -c_{k-j} : \quad \sum_{i=0}^k c_i^* p^i(\mathbf{a}) = (\mathbf{b}^*)$$

Výraz na levé straně je mnohočlenem $P_k(p)$ s koeficienty c_i^* ($c_k = 1, c_0 \neq 0$) aplikovaným na posloupnost (\mathbf{a}) . Mnohočlen $P_k(p)$ je tedy charakteristickým lineárním zobrazením pro lineární rekurentní vztah s konstantními koeficienty.

Dále hledáme jádro charakteristického (lineárního) zobrazení L a nějaké partikulární řešení.

Vlastní podprostor

Věta D7.1: Všechny vlastní vektory lineárního zobrazení $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ se společným vlastním číslem λ , doplněné o nulový vektor, tvoří podprostor ve \mathcal{V} ; tento podprostor nazýváme **vlastním podprostorem** zobrazení f (s vlastním číslem λ).

Lineární nezávislost

Věta D7.2: Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ navzájem různé vlastní hodnoty lineárního zobrazení $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, jim odpovídající vlastní vektory, pak je množina vektorů $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ lineárně nezávislá.