1. Zobrazení

Zadání z okruhů: Základní pojmy spojené se zobrazením: jednoznačnost, vzor, obraz, definiční obor, obor hodnot, vzor prvku, vzor podmnožiny oboru hodnot. Inverzní zobrazení, prosté zobrazení. Skládání zobrazení, identita

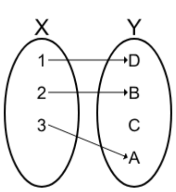
- **Zobrazení ($f: M \to N$):**
  - Předpis, kde ke **každému** x (vzor) existuje **PRÁVĚ JEDNO** y (obraz).
  - Nesmí nikdy vyjít více y
  - Např. 5 + 5 = 10 (nemůže se to rovnat ještě třeba 11 nebo 12 atd)
- **Jednoznačnost:** Jeden vzor nesmí mít více obrazů.
- **Definiční obor (D_f):** Množina vstupů
- **Obor hodnot (H_f):** Množina výstupů
- **Vzor:** Vstup, který jsme do zobrazení dali
- **Obraz:** To, co z toho vzoru vzniklo (VÝSLEDEK)
- **Vzor prvku ($f^{-1}(y)$):**
  - Množina všech x, které se zobrazí na konkrétní y.

    Představ si funkci $f(x) = x^2$ (umocňování na druhou):

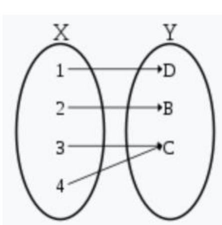
    1. **Vzor prvku 9:**
       - Která čísla po umocnění dají 9? Jsou to 3 a -3.
       - **Zápis:** $f^{-1}(9) = \{-3, 3\}$.
- **Vzor podmnožiny:**
  - Všechny prvky z M, které se zobrazí do vybrané podmnožiny $B \subseteq N$

  Mějme zobrazení $f(x) = x^2$.

  - **Tvoje vybraná podmnožina výsledků:** $\{4, 9\}$ (To jsou ty výsledky, co tě zajímají).
  - **Vzor této podmnožiny:** Čísla $\{-2, 2, -3, 3\}$.
    - *Proč?* Protože všechna tato čísla po umocnění "vyrobí" buď 4, nebo 9.
- **Prosté (injektivní) zobrazení:** Různé vzory mají různé obrazy. Nemůže mít 1 obraz více vzorů

- **Na (surjektivní) zobrazení:** Obor hodnot je celá cílová množina ($H_f = N$).

- **Inverzní zobrazení (f^{-1}):** Cesta zpátky. Pokud f udělalo z $A \to B$, inverzní zobrazení udělá $B \to A$.
- **Skládání ($f \circ g$):**

  Mějme funkce: $f(x) = 2x$ a $g(x) = x + 3$.
  - **Složení $(g \circ f)(x)$:** Nejdřív násobíš dvěma, pak přičteš tři $\to$ $\mathbf{2x+3}$.
  - **Složení $(f \circ g)(x)$:** Nejdřív přičteš tři, pak to celé násobíš dvěma $\to$ $2(x+3) = \mathbf{2x+6}$.
- **Identita:** Zobrazení, které nemění vstup -> Id(5) = 5

2. Těleso zbytkových tříd s prvočíselným modulem

Zadání z okruhů: Pojem zbytkové třídy, operace sčítání a násobení. Řešení lineárních rovnic a jejich soustav.

- Množina $Z_p = \{0,1,\dots,p-1\}$, kde p je prvočíslo.
  - **Proč prvočíslo?** Protože v tělese musí ke každému nenulovému prvku existovat **inverzní prvek** (dělení). Kdyby p nebylo prvočíslo (např. 4), tak existují 'dělitelé nuly' (např. $2 \cdot 2 = 4 \equiv 0$ a tím pádem k dvojce neexistuje inverze.
- **Zbytková třída:**
  - Každý prvek v množině je zbytková třída
  - Když máme mod 5, tak naše zbytkové třídy jsou (0, 1, **2**, 3, 4)
  - Např. třída $[2]_5$ reprezentuje čísla, která mají po dělení 5 zbytek 2 (…, 7, 12, 17, …)
- **Operace:**

  Příklad pro $\mathbb{Z}_5$:
  - **Sčítání:** $3 + 4 = 7 \to$ (zbytek po dělení 5) $\to \mathbf{2}$
  - **Násobení:** $3 \cdot 4 = 12 \to$ (zbytek po dělení 5) $\to \mathbf{2}$
- **Řešení lineárních rovnic:**
  - **Příklad v $\mathbb{Z}_5$:** Řeš rovnici $2x = 1$.
  - Normálně bys řekl $x = 0,5$. Ale v $\mathbb{Z}_5$ číslo $0,5$ neexistuje.
  - Musíš najít číslo z $\{0,1,2,3,4\}$, které když vynásobíš dvojkou, zbytek bude 1.
  - Zkusíš: $2 \cdot 3 = 6 \to$ zbytek po dělení 5 je **1**.
  - **Výsledek:** $x = 3$.
- **Počítání:**
  - **Malé rovnice:** Jde jednoduše vyřešit zkoušet dosazovat.
  - **Soustava**: Řeší se Gaussovou el. stejně jako v $\mathbb{R}$, jen sčítáme/násobíme modulo p.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \implies \mathbf{y = 2, x = 0}$$

3. Vektorový prostor

Zadání z okruhů: Definice, vlastnosti operací. Příklady vektorových prostorů a definice operací s vektory v jednotlivých případech.

- Definice: Množina prvků (vektorů), na které máme definované 2 operace:
  - Sčítání (+)
  - Násobení (·).
  - Dělení a Odčítání není potřeba, protože je to schované v sčítaní a násobení.
- **Vlastnosti operací (Axiomy)**:
  - **Pravidla pro SČÍTÁNÍ**:
    - **Nezáleží na pořadí:** 1 + 2 = 2 + 1
    - **Závorky jsou jedno:** (1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)
    - **Nulový vektor:** 1 + 0 = 1
    - **Opačný vektor:** 1 + (-1) = 0
  - **Pravidla pro NÁSOBENÍ:**
    - **Roznásobovat závorky:** 2*(1 + 3) = 8
    - **Jednotka**: 2*1 = 2
- **Příklady vektorů:**

  Sčítání: První s prvním, druhý s druhým.

  - $(1,2) + (3,4) = (4,6)$

  Násobení: Každou složku vynásobíme číslem.

  - $2 \cdot (1,5) = (2,10)$
- **Příklady maticí stejných rozměrů:**

  1. Sčítání matic (po složkách) Sčítají se vždy čísla na stejných pozicích. Matice musí mít stejný rozměr.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 0+1 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

  2. Násobení matice číslem (každý prvek) Každé číslo uvnitř matice se vynásobí daným koeficientem.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Podprostor:** Podmnožina vektorového prostoru, která je sama o sobě vektorovým prostorem (tzn. operace sčítání a násobení nás nevyvedou ven). Obsahuje nulový vektor. Je uzavřená na sčítání a na násobení číslem. Příklad: Přímka procházející počátkem v R^2.
- **Lidské vysvětlení:**
    - Definice: Je to „hřiště“, kde platí pravidla slušného chování. Když sečtete dva členy hřiště, výsledek musí být zase na hřišti. Když člena zvětšíte/zmenšíte, musí být zase na hřišti.

4. Lineární kombinace vektorů

Zadání z okruhů: Definice, lineární obal množiny vektorů a jeho vlastnosti. Změny v množině vektorů, které zachovávají lineární obal. Gaussova eliminační metoda.

- **Definice:** Vektor se rovná součtu jiných vektorů, které jsou jednotlivě násobeny koeficienty

  $$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

- **Lineární obal ($\langle M \rangle$):** množina **všech možných lineárních kombinací**, které dokážete z daných vektorů vytvořit.
    - **1 Vektor:** Lineární obal je célá PŘÍMKA.
    - **2 Vektory:** Jejich lineární obal je celá PLOCHA (pokud nejsou na jedné přímce).
    - **3 Vektory:** Jejich lineární obal je celý 3D PROSTOR.
- **Vlastnosti:**
    - Musí procházet body (0, 0, 0).
    - Co se stane v podprostoru, zůstane v podprostoru (neexistuje operace, které by nás vyhodila ven).

- **Změny zachovávající obal:**
    - Vynásobení vektoru **nenulovým** číslem.
    - Přičtení násobku jednoho vektoru k druhému. (výsledek se možná natočí jinam, ale bude furt v rovině).
    - Prohození vektoru.
- GEM: Gaussova eliminace není nic jiného než **opakované dělání lineárních kombinací**, dokud se vektory „nevyčistí“.

5. Soustavy lineárních rovnic

Zadání z okruhů: Prostor lineárních rovnic o více neznámých, soustavy se stejnou množinou řešení, řešení soustav pomocí Gaussovy eliminace a zdůvodnění funkčnosti metody.

- **Prostor rovnic:** Všechny možné pravdivé důsledky původního zadání
    - **Např.** x + y = 2

Rovnice	Patří do prostoru?	Proč?
$2x + 2y = 4$	✅ ANO	Je to jen násobek (stejná informace).
$x + 2y = 2$	❌ NE	Je to nová, nezávislá informace (nedá se namíchat).

- **Soustavy se stejnou množinou řešení (Ekvivalentní soustavy):**

        - Mají stejnou množinu řešení.
        - Soustava rovnic o 2 neznámých.
        - Stejná pravda, jen jinak napsaná.

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

    - **Proč GEM funguje:** Protože <u>EKVIVALENTNĚ</u> upravuje rovnice.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\downarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

        - 0 = 5 (Žádné řešení)
        - 0 = 0 (Nekonečně mnoho řešení, je potřeba nějaký PARAMETR)

$$y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

6. Lineární závislost vektorů

Zadání z okruhů: Různé definice lineární nezávislosti. Báze vektorového prostoru. Dimenze vektorového prostoru. Souřadnice vektoru v bázi, izomorfizmus konečněrozměrného prostoru s T^n. Souřadnice vektoru v různých bázích.

- **Lineární Závislost (Závislé):** Alespoň jeden vektor je možný vytvořit pomocí ostatních, takže tam je zbytečný
    - (1, 0)   (0, 1)   (1, 1) – Ten třetí vektor je zbytečný, protože jde vyrobit po sečtení prvních dvou.
- **Lineární Nezávislost (Nezávislé):** Vektory, které míří každý jiným směrem. Nelze z prvního vyrobit druhý.
- **Báze:** Nejmenší počet vektorů, se kterým lze popsat všechno v daném prostoru.
    - Jsou to vektory, které jsou lineárně nezávislé (není tam nic navíc).
    - Generují celý prostor.
    - Bází je nekonečně mnoho.
    - **STANDARDNÍ BÁZE:**
        - $E = ((1,0),(0,1)).$
- **Dimenze:** Počet VEKTORŮ v bázi.
    - **V rovině** $\mathbb{R}^2$ je dimenze 2
    - **V rovině** $\mathbb{R}^3$ je dimenze 3
- **Souřadnice:** Jednoznačná n-tice koeficientů vyjadřující vektor v dané bázi.

$$B = (b_1, b_2)$$

$$b_1 = (1,1)$$
$$b_2 = (0,2)$$
$$u = (3,7)$$
$$a \cdot (1,1) + b \cdot (0,2) = (3,7)$$
$$[u]_B = (3,2)$$

- **Izomorfismus:**
  - Pokud jádro je 0 (nic se neztratilo) a obrazem je celý cílový prostor
  - „Dokonalé zrcadlo“
  - Splňuje INJEKTIVNOST (Prosté) a SURJEKTIVNOST (Na) = Bijekce

7. Číselné matice a operace

Zadání z okruhů: Násobení matice vektorem, násobení matic. Matice přechodu. Matice reprezentující operace v Gaussově eliminační metodě. Jednotková matice, inverzní matice a její výpočet Gaussovou-Jordanovou eliminační metodou. Lineární kombinace matic. Transpozice matice. Vztahy mezi různými maticovými operacemi. Blokové matice a výpočty s nimi.

- **Násobení:** Lze, pokud počet sloupců matice A je roven počet řádků matice B
- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 21 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x10 + 2x20 + 3x30 & 1x11 + 2x21 + 3x31 \\ 4x10 + 5x20 + 6x30 & 4x11 + 5x21 + 6x31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+40+90 & 11+42+93 \\ 40+100+180 & 44+105+186 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 146 \\ 320 & 335 \end{bmatrix}$$
  $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$
- **Matice přechodu:**
  - Slouží k PŘEPOČTU SOUŘADNIC z báze do druhé báze
  - Obsahuje ve sloupcích souřadnice vektorů jedné báze vzhledem k druhé bázi.
  - **Zadání:** Stará báze $B = \{(1,0),(0,1)\}$ Nová báze $C = \{(1,1),(0,1)\}$

    Výpočet koeficientů (sloupců):

    $$(1,0) = \mathbf{1} \cdot (1,1) + (-\mathbf{1}) \cdot (0,1)$$
    $$(0,1) = \mathbf{0} \cdot (1,1) + \mathbf{1} \cdot (0,1)$$

    Výsledná matice přechodu:

    $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Jednotková matice (I):** Na diagonále 1, jinde 0.
- **Inverzní matice:** $AA^{-1} = I$. Výpočet $(A|I) \sim \cdots \sim (I|A^{-1})$.
- **Transpozice (A^T):** Záměna řádků a sloupců.
- **Lineární kombinace matic:** Kombinace matematický operací (např. 2*A – 3*B)
- **Blokové matice:** Matice rozdělená na podmatice. Operace se provádí jako s prvky (pokud sedí rozměry).

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

- **VZTAHY:**

Transpozice součinu	$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
Inverze součinu	$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
Transpozice inverze	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Dvojitá transpozice	$(A^T)^T = A$
Dvojitá inverze	$(A^{-1})^{-1} = A$

8. Lineární zobrazení

Zadání z okruhů: Definice lineárního zobrazení, aditivní a homogenní zobrazení. Přípustné operace s lineárními zobrazeními. Jádro lineárního zobrazení, vlastnosti definičního oboru a oboru hodnot.

- **Definice:**
    - Lineární zobrazení L je funkce mezi 2 věktory, např. U a V.
- Zachovává $L(u + v) = L(u) + L(v)$ a $L(\alpha u) = \alpha L(u)$.
- **Aby bylo zobrazeni $L : U \to V$ lineární, musí splňovat:**
    - Sčítání (Aditivita): $L(u + v) = L(u) + L(v)$
    - Násobení (Homogenita): $L(\alpha u) = \alpha L(u)$.
- **Přípustné operace s lineárními zobrazeními**:
    - SOUČET: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$: Neboli 2x + 5x = 7x
    - NÁSOBENÍ: $(af)(x) = a * f(x)$
    - SKLÁDÁNÍ: $(f\ o\ g)(x) = f(g(x))$:
        - Čte se to – “f po g”
        - Záleží na pořadí
        - Vstup se hodí do g a výstup z toho se hodí do f
- **Jádro (Ker):**

        - $\text{Ker(L)} = \{x \in U \mid L(x) = 0\}$.
        - “Ker říká, co se vše ztratilo”
        - Je to podprostor definičního oboru (U).
        - Vždy obsahuje aspoň nulový vektor $\{0\}$
        - Zobrazení je INJEKTIVNÍ právě tehdy, když v jádru leží nula
    - **Obor hodnot (Im):**
        - Je to podprostor cílového prostoru (V).
        - “Im říká, co zůstalo”
        - Zobrazení je SURJEKTIVNÍ, pokud obor hodnot splýva s celým cílovým prostorem
    - **Platí:**
        - $\dim \text{Ker} + \dim \text{Im} = \dim V$. (dimV je Dimenze definiční obor)
        - Příklad:
            - $\dim(\mathrm{V})$ = 3D svět (x, y, z)
            - $\dim(\mathrm{lm})$ = 2D (x , y – fotka na papíře)
            - $\dim(\mathrm{Ker})$ = 1D (z – ztratila se hloubka)

9. Frobeniova věta

Zadání z okruhů: (pro obecná lineární zobrazení): Množina vzorů daného vektoru při lineárním zobrazení. Postup hledání neznámého vzoru při známém obrazu. Souvislost s řešením soustav lineárních rovnic.

- **Definice věty:**
    - Říká nám, jestli má rovnice vůbec smysl
    - Řešení existuje ⇔ $h(A) = h(A|b)$
    - Hodnost matice = Hodnost rozšířené matice. Hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků (nebo sloupců) té matice. Značíme $h(A)$.
    - 0 = 5 (nemá řešení)
    - 0 = 0 (nekonečně mnoho řešení)

Pokud $h(A) \neq h(A|b)$: Soustava **nemá řešení** (rovnice si odporují).

Pokud $h(A) = h(A|b) = n$ (počet neznámých): Soustava má právě **jedno řešení**.

Pokud $h(A) = h(A|b) < n$: Soustava má **nekonečně mnoho řešení** (máme volné parametry).

- **Množina vzorů daného vektoru:**
    - $M = x_p + \text{Ker}(A)$
    - $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
    - x_p = Partikulární řešení, neboli jeden konkrétní vzor, který FUNGUJE

  - $\mathrm{Ker}(A)$ = Jádro. To je množina všech vektorů, které se zobrazí na nulu
  - M = (Jeden funkční input) + (Cokoliv, co funkce ignoruje/vynuluje)
- **Postup hledání:**
  - 1. **Rovnice:** $2x = 6$ a $2y = 12$.
    2. **Matice:** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 12 \end{array}\right)$.
    3. **Výsledek:** $x = 3, y = 6$.
    4. **Vzor:** Vektor $(3, 6)$.

10. Maticová reprezentace

Zadání z okruhů: Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vzoru. Konstrukce maticové reprezentace. Maticové reprezentace operací na lineárních zobrazeních. Změna matice při změně bazí ve výchozím a cílovém prostoru.

- **Definice:** Je to předpis zapsaný do tabulky, který umožňuje vypočítat lineární zobrazení pomocí násobení souřadnic.
- **Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vzoru:**
  - $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$: Maticová reprezentace zobrazení f.
    $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: Souřadnice **vzoru** v bázi $\mathcal{B}$ (vstupní data).
    $[f(x)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: Souřadnice **obrazu** v bázi $\mathcal{E}$ (výsledek po zobrazení).
  - $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- **Zobrazení je jednoznačně určeno obrazy bázových vektorů:**
  - Vzor (x): Vstupní vektor
  - Obraz (y): Výstup
  - Matice (A)

    $y = A \cdot x$
- **Konstrukce matice:** Popisuje výrobu té matice z vektorů
- **Maticová reprezentace na lin. zobrazeních:**
  - $(f + g) = A + B$
  - $(a * f)$ = $a * A$
  - $(f\ o\ g)(x) = f(g(x))$:
    - Čte se to – “f po g”
    - Záleží na pořadí
    - Vstup se hodí do g a výstup z toho se hodí do f
- **Změna báze:**

        - $$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$$
        - A = Stará matice
        - T = Matice přechodu
        - T^{-1} = Inverzní matice přechodu
        - Proč se to dělá: Matice může být jednodušší v jiné bázi

11. Lineární zobrazení do sebe (Endomorfismus)

Zadání z okruhů: Vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení, vlastnosti vlastních vektorů. Hlavní vektory. Elementární metody hledání vlastních čísel a vektorů na konečnědimenzionálních prostorech.

- **Definice:** Lineární zobrazení, které jde do stejného prostoru
- **Vlastní číslo (λ):**
    - $\det(A - \lambda I) = 0.$
    - Faktor, kterým se ten směr natáhne.
- **Vlastní vektor:**
    - Je to nenulový vektor v, pro který platí, že má furt STEJNÝ SMĚR, ale může měnit velikost kvůli násobení číslem λ
    - $$A \cdot v = \lambda \cdot v$$
    - $$(A - \lambda I)v = 0$$
- **Hlavní vektory:** Pokud mám málo vlastních vektorů, doplňujeme bázi hlavními vektory
- **Výpočet:**
    - $$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$
    - $\begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$ (Pak se počíta determinant)
    - $$\lambda^2 - \lambda - 43 = 0$$
    - $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{173}}{2}$ (Vlastní čísla)
- Jordanův řetězec:
    - $$(A - \lambda I)v_{hlavní} = v_{vlastní}$$

12. Skládání endomorfismu se sebou

Zadání z okruhů: Mocniny a mnohočleny z lineárních endomorfismů. Jádro z mnohočlenu lineárního endomorfismu a jeho vztah ke kořenům mnohočlenu a vlastním vektorům základního endomorfismu.

- **Mocniny zobrazení** f^n:
  - $f(f(f\left(f(\dots f(x))\right)$. Prostě tu operaci zopakuješ n-krát.
  - **Odpovídající matice** A^n: V maticovém světě to odpovídá A * A * A * … *A.
  - **Příklad**: Pokud matice A^1 otočí vektor o 90°, pak A^2 ho otočí o 180°, …
- **Mnohočlen zobrazení:**
  - Matice můžeme dosazovat do rovnic jako čísla
  - POZOR: u konstant je potřeba přidat JEDNOTKOVOU MATICI
  - $$x^2 - 1 \xrightarrow{\text{dosadíme } A} A^2 - 1 \cdot \mathbf{I}.$$
  - Základní vzorec:
  - $$P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$
- **Jádro mnohočlenu:** Jsou to VEKTORY, které výsledná matice VYNULUJE (odpadkovej koš)
  - $$P(A) \cdot v = 0$$
- **Vztah kořenů k jádru:** Pokud VLASTNÍ ČÍSLO λ vynuluje rovnici, potom i jeho VLASTNÍ VEKTOR vynuluje matici.

13. Determinant

Zadání z okruhů: Možné definice a metody jeho výpočtu, geometrická interpretace.

- **Definice:** Číslo, co určuje, zda se matice zvětšila/zmenšila atd.

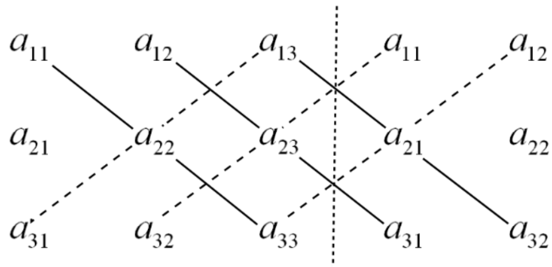
det(A) > 1	**Zvětší se** (Nafoukne)
det(A) je 0 až 1	**Zmenší se** (Scvrkne)
det(A) = 0	**Zničí se** (Rozplácne na placku)
det(A) je mínus	**Otočí se** (Jako v zrcadle)

- det(A * B) = det(A) * det(B)
- Vzorec pro INVERZNÍ MATICI.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

- **adj(A) – Adjungovaná matice:** Matice složená z determinantů všech podmatic původní matice

- $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjungovaná}} \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- **Metody:**
  - Sarrusovo pravidlo (pouze $n = 3$)
  - 

  - Gaussova eliminace na trojúhelníkový tvar (součin diagonály).
  - Laplaceův rozvoj
  - $$\begin{aligned}\det(A) = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot 2 + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot 7 \\ &= -9.\end{aligned}$$
- **Geometrie:**
  - **Matice 2x2** -> Vytvoříme **2 vektory** ze sloupců a nakreslíme -> **OBSAH plochy** je roven determinantu
  - **Matice 3x3** -> Vytvoříme **3 vektory** ze sloupců a nakreslíme -> **OBJEM tělesa** je roven determinantu
  - Kdyby determinant byl např. **-5**, tak to nevadí, protože bereme **ABSOLUTNÍ hodnotu**

14. Skalární součin

Zadání z okruhů: Definice, vlastnosti. Norma vektoru a její vlastnosti. Skalární součiny na různých vektorových prostorech. Speciálně: prostor l_2 a výpočet skalárního součinu geometrických posloupností. Metrická matice a výpočet skalárního součinu vektorů pomocí souřadnic v dané bázi. Výpočet souřadnic vektoru v dané bázi pomocí skalárního součinu.

- **Definice**:
  - Operace, která ze 2 vektorů udělá jedno číslo (skalár)
  - Pomocí toho zjistím, jestli vektory jsou na sebe kolmé (=0)
  - $(1,0) \cdot (0,1) = 0$
- **Vlastnosti**:
  - Symetrie: u*v = v*u
  - Funguje roznásobování závorek: a*(u + v) = au + av
  - Skalární součin vektoru se sebou samým je vždy KLADNÝ nebo NULA

        - $u \cdot u \geq 0.$
- **Norma:** $\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
    - Vždy je kladný nebo roven 0
- **Prostor l_2:**
    - **l_2 = Nekonečněrozměrný prostor, který se využívá v pokročilé matematice**
    - **Pokud máme vektor, který má nekonečně mnoho složek**

      $$u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$$

    - Musí platit podmínka, aby "nevybouchnul" do nekonečna:
    - $$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty$$
- **Metrická matice (G):**
    - Nástroj, který nám umožní vypočítat skalární součin 2 vektorů v LIBOVOLNÉ BÁZI
    - $$a^T \cdot G \cdot b = 0$$

15. Úhel a ortogonalita

Zadání z okruhů: Schwartzova nerovnost, úhel mezi vektory, speciálně kolmost dvou vektorů. Ortogonální množiny a jejich vlastnosti. Gramův-Schmidtův algoritmus. Tříčlenné rekurence pro ortogonalizaci speciálně konstruovaných množin.

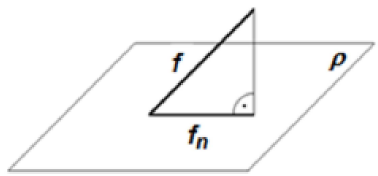
- **Schwartzova nerovnost:**
    - Velikost skalárniho součinu nemůže být větší než součin jejich délek.
    - $$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$
- **Úhel:**
    - Díky této nerovnosti víme, že výpočet výjde vždy mezi -1 a 1.
    - $$\cos(\phi) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$
- **Kolmost:**
    - **Kolmost = ORTOGONÁLNÍ**
    - $\langle u, v \rangle = 0.$
- **Ortogonální množiny:**
    - Množina vektorů, kde každý vektor je s každým kolmý
    - Každý vektor míří jiným směrem
- **Gram-Schmidt:**
    - Algoritmus, který transformuje BÁZI na BÁZI ORTOGONÁLNÍ

- Výsledné vektory jsou tak kolmé
- Pokud i délky jsou jedna, jedná se o ORTONORMÁLNÍ BÁZI

16. Optimální aproximace

Zadání z okruhů: Vektor v podprostoru nejbližší k danému vektoru, podstata pojmu „nejbližší“. Konstrukce aproximace: vlastnosti odchylky, výpočet souřadnic aproximace v dané bázi, výpočet velikosti odchylky.

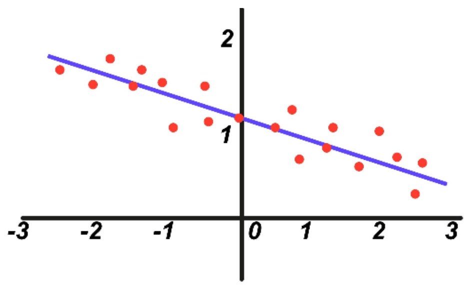
- **Aproximace = Přiblížení** (nahrazení něčeho složitého za něco jednodušího)
- **Vektor v podprostoru nejbližší k danému vektoru:**
    - Říká se tomu ORTOGONÁLNÍ projekce

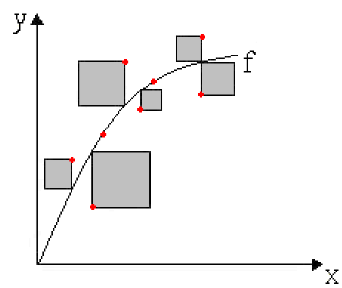


- **Konstrukce aproximace:**
    - **Vlastnosti odchylky:**
        - Odchylka je definována jako rozdíl mezi původním vektorem a jeho projekcí
        - $\mathbf{e} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}.$
    - **Výpočet souřadnic v OBECNÉ bázi:**
        - Přes Gramovu matici
        - $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$
    - **Výpočet souřadnic v ORTOGONÁLNÍ bázi:**
        - $c_i = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$
    - Výpočet velikosti odchylky:
        - Pomocí Pythagorovy věty
        - $\|\mathbf{v}\|^2$ = Čtverec délky původního vektoru
        - $\|\hat{\mathbf{v}}\|^2$ = Čtverec délky jeho ortogonální projekce
        - $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - \|\hat{\mathbf{v}}\|^2}$

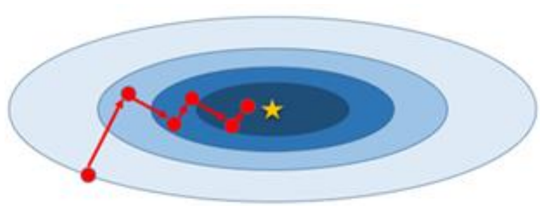
17. Použití aproximací

Zadání z okruhů: Metoda nejmenších čtverců, metoda sdružených gradientů, JPEG komprese. Úplná ortogonální množina v prostoru a Fourierovy řady.

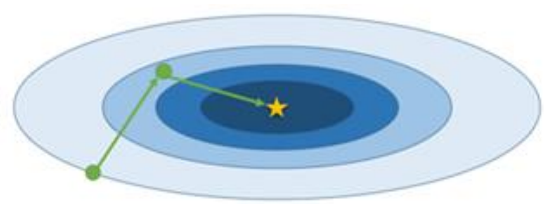
- **Aproximace = Přiblížení** (nahrazení něčeho složitého za něco jednodušího)
- **Metoda nejmenších čtverců:**
  - Řešení přeurčené soustavy $Ax = b$. Obvykle nemá řešení, protože čára nemůže projít přes všechny body.
  - Minimalizujeme přes $\| Ax - b \|^2$ a hledáme nejmenší možnou chybu.
  - Příklad: Máme několik teček v grafu, které měli ležet v jedné přímce, ale kvůli chybám měření, tam jsou odchylky.
  - Princip: Hledáme takovou přímku, aby součet chyb “vzdálenosti bodů od přímky” byl co nejmenší
  - 



- **Metoda sdružených gradientů:**
  - Conjugate Gradient - Sdružené gradienty
    - Udělá první krok a druhý krok volí chytře, že zamíří přímo do středu terče (do řešení)
  - Steepest Descent - Metoda největšího spádu
    - Udělá první krok a pak každý následující je kolmý. Dlouho to trvá, než dojde k cíli.



M. největšího spádu



M. sdružených gradientů

- **Fourierovy řady:** Rozklad složité funkce na součet jednoduchých goniometrických funkci (sinus a kosinus – jsou na sebe kolmé a nezávislé) = Lze z nich složit libovolný signál.
- **JPEG komprese:** Využívá aproximaci k redukci dat (lidské oko nepozná rozdíl, ale počítač ušetří data)
- **Úplná ortogonální množina:** Je to taková množina vzájemně kolmých (ortogonálních) vektorů, ke které už nelze přidat žádný další nenulový vektor, aby byl kolmý na všechny ostatní.

18. Výpočetní náročnost

Zadání z okruhů: Počty operací nutné k násobení matice vektorem, násobení matic, použití Gaussovy eliminační metody a Gaussovy-Jordanovy eliminace. Strassenův algoritmus.

- **Matice × Vektor:**
  - A * v = b
  - $O(n^2)$.
- **Matice × Matice:**
  - A * B = C
  - $O(n^3)$.
- **GEM:** $O(n^3)$.
- **Determinant**: $O(n^3)$.
- **GJE**:
  - Je to o trochu pomalejší než GEM, ale řádově je to stejné
  - $O(n^3)$.
- **Strassenův algoritmus:**
  - Algoritmus pro násobení matic s náročností cca $O(n^{2.807})$.
    - Máme matici 2x2
    - Klasický postup potřebuju 8 násobení
    - Strassenův postup jich potřebuje 7, ale je potřeba více sčítání (které je levné)
    - Vyplatí se jen opravdu pro obrovské matice.

19. Matematická indukce

Zadání z okruhů: Princip, použití.

- Definice: Je to metoda, která dokazuje, že něco platí pro všechna $\mathbb{N}$
- **1. Základní krok:** $n = 1$ (Musíme ověřit, že pravidlo platí pro nejmenší číslo. Poté ověřujeme, zda to platí i pro ostatní)
- **2. Indukční krok:** $n = n + 1$ (Poté ověřujeme, zda to platí i pro ostatní)
- **REKURZE:** Např. v programování můžeme naprogramovat funkci FAKTORIAL, kde používáme rekurzi (Funkce volá sama na sebe, dokud nenarazí na nejmenší číslo)
- **Použití:**
  - Gaussovský součet = $\frac{n(n+1)}{2}$
  - V programování se to používá např. u REKURZÍ

$$
\begin{aligned}
n = k: &\quad 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \\
n = k+1: &\quad 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&\quad \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&\quad 0 = 0
\end{aligned}
$$

20. Pravidla kombinatoriky

Zadání z okruhů: Pravidlo součtu, součinu, princip inkluze a exkluze. Dirichletův princip.

- **Pravidlo součinu:**
  - $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
  - Příklad: Mám 3 trička a 5 kalhot. Mohu z toho vytvořit 3 x 5 = 15 outfitů.
- **Pravidlo součtu:**
  - $|A \cup B| = |A| + |B|$
  - Příklad: Mám peníze na jedno jídlo a mohu si vybrat ze 3 polívek nebo 5 hlavních jídel: 3 + 5 = 8 možností.
- **Princip inkluze a exkluze:**
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - Příklad: Ve třídě je 20 programátoru, 15 z nich umí Python a 10 z nich umí Javu. Kolik lidí umí OBA jazyky?
  - 15 + 10 = 25 (to je větší než 20, musíme z výsledku odečíst počet lidí)
  - 25 – 20 = 5
- **Dirichletův princip:**
  - $n + 1$ předmětů do n přihrádek ⇒ aspoň jedna přihrádka má 2 předměty.
  - Příklad: Mám 13 studentů, takže je 100% šance, že se něktěří narodili ve stejný měsíc (n + 1 = 13 studentů, n = 12 měsíců)

21. Kombinatorické výpočty

Zadání z okruhů: Variace, permutace a kombinace bez opakování a s opakováním. Kombinatorické identity, Pascalův trojúhelník, Pascalova Identita. Binomická věta. Zobecněná kombinační čísla, Newtonův vzorec.

- **Variace:**
  - $\frac{n!}{(n-k)!}$
  - n = počet prvků
  - k = kolik
  - Příklad: Běží 10 lidí, a 3 dostanou medaili (10! / 7!)
  - ZÁLEŽÍ NA POŘADÍ
- **Permutace:**
  - $P(n) = n!$ - pořadí.
  - Např. mám 5 lidí vedle sebe, kolika způsoby je můžu seřadit? = 5!
- **Kombinace (bez opakování):**
  - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

        - NEzáleží NA POŘADÍ, výsledek je stejný
        - Příklad: Sportka
    - **Kombinace (s opakováním):**
        - $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
        - Příklad: 3 druhy zmrzliny, chceme 2 kopečky. Zmrzliny můžeme opakovat.
    - **Pascalův trojúhelník:**

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$(a+b)^4 \longrightarrow 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

    - Pascalova IDENTITA:
        - Matematický zápis, jak funguje sčítání v P. trojúhelníku
        - $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
    - **Binomická věta:**
        - Vzorec, který ukazuje, jak efektivně vypočítat pomocí P. trojúhelníku např. $(a+b)^4$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

    - **Zobecněná kombinační čísla:**
        - n = může být klidně REÁLNÉ číslo
        - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
    - **Newtonův vzorec:**
        - Platí jen, když $|x|$ je < 1. Kdyby to bylo velké, řada by šla do NEKONEČNA
        - Vzorec, který ukazuje, jak efektivně vypočítat např. $(1+x)^{0,5}$ i když mocnina není celé číslo (může být i záporné)

- $$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

22. Číselné posloupnosti

Zadání z okruhů: Prostor číselných posloupností. Lineární zobrazení na prostoru číselných posloupností. Rekurentně definované posloupnosti. Rekurence konečného řádu, diferenční rovnice. Počáteční podmínky. Lineární rekurentní vztahy konečného řádu.

- Definice:
  - Zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
  - Nekonečný seznam čísel
  - Pokud je to lineární zobrazení, platí pro ně:
  - **Aditivita:** $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$

    Homogenita: $\Delta(5 \cdot a) = 5 \cdot \Delta a$ (
- **Lineární zobrazení:**
  - **Posun (Shift):** $S(a_n) = a_{n+1}$ (Zahoď první prvek a posuň se dál)
  - **Diference:** $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ (Počítá změnu mezi sousedy)
- **Rekurence:** Rovnice $L(a_n) = 0$.
  - Je to něco jako Fibonacci
  - Pravidlo, jak vypočítat další člen, když neznáš ten předchozí
  - $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacci).
- **Rekurentně definovaná posloupnost:** Neříká nám rovnou, jaký je výsledek, ale říká, jak se k němu dostat z předchozího kroku
- $a_{n+1} = a_n + 3$ (Vztah)

  $a_1 = 2$ (Počáteční podmínka - stojíme na čísle 2)
- **Počáteční podmínky:** Číslo zadané na začátku. Nutné pro jednoznačnost řešení
- **Lineární rekurentní vztahy konečného řádu:**
  - Pokud vyšli 2 kořeny JINAK:
    - $a_n = C_1 \cdot (\lambda_1)^n + C_2 \cdot (\lambda_2)^n$
  - Pokud vyšlí 2 kořeny STEJNĚ:
    - $a_n = C_1 \cdot \lambda^n + C_2 \cdot \mathbf{n} \cdot \lambda^n$

23. Řešení lineárních rekurentních vztahů

Zadání z okruhů: Lineární rekurentní vztahy s konstantními koeficienty. Charakteristický mnohočlen rekurentního vztahu. Vlastní čísla a vlastní hlavní vektory posunutí posloupnosti, reálné posloupnosti generované dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel. Řešení nehomogenních rekurencí se speciálními pravými stranami.

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 12$$

- Koeficienty: to jsou ty čísla před „**a**“, takže (2, 3)
- Charakteristický mnohočlen:
  - $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$
- Vlastní čísla:
  - $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0.$ Vyjde ti $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1.$
- Vlastní hlavní vektory:
  - To se dělá, pokud nám vyjdou 2 stejné kořeny
  - Pokud máš násobný kořen, jeden vektor je 3^n, ale druhý ti chybí. Musíš ho vyrobit uměle jako (**3^n * n)**
- Posloupnosti generované dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel:
  - Kdyby DISKRIMINANT byl 0 nebo záporný
  - Místo **3^n** by se tam dali SINUS a KOSINUS
- Řešení nehomogenní části (Co s číslem na konci?):
  - To je ta -12 na konci
  - Homogenní: Kdyby tam byla 0
  - Nehomogenní/Partikulární: To je ta -12 na konci
  - Dosadíme c místo všech a_n:

    $$c = 2c + 3c - 12$$

    Vyřešíme rovnici pro c:

    $$c = 5c - 12$$

    $$-4c = -12$$

    $$c = 3$$

    Naše partikulární řešení je 3.

24. Rovinné grafy

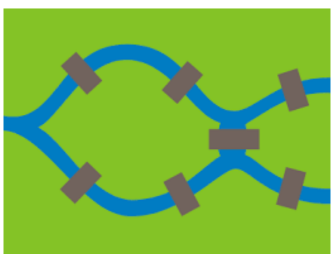
Zadání z okruhů: Základní pojmy, incidence, matice sousednosti. Skóre grafu, Havlův algoritmus. Souvislost grafů – sled, tah, cesta. Speciální typy grafů. Eulerovské a hamiltonovské grafy.

- **Rovinné grafy:** To je graf, který lze nakreslit na papír, aniž by se křížily hrany
- **Základní pojmy:** Vrcholy V, hrany E.

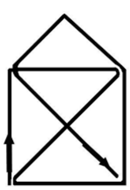
- **Incidence:** Vztah, který nám říká, jestli hrana je napojená na vrchol. Často se z toho tvoří MATICE INCIDENCE.
- **Matice sousednosti:** Ta nám ukazuje, zda např. vrchol A a B spolu sousedí.
- **Skóre grafu:** Počet hran, kolik je napojených na vrchol.
- **Havlův algoritmus:** Zjistí, zda jde z posloupnosti vytvořit graf.
  - Maže se vždy největší prvek a poté se od každého čísla odebere 1. Tohle se opakuje několikrát.
  - Pokud v posloupnosti zbydou jen 0, graf lze vytvořit.
- **Souvislost:**
  - **Sled:** Posloupnost vrcholů a hran (mohou se opakovat).
  - **Tah:** Neopakují se hrany (kreslení domečku jedním tahem).
  - **Cesta:** Neopakují se vrcholy.

Název	Opakování hran?	Opakování vrcholů?	Přísnost
Sled	✅ ANO	✅ ANO	Žádná
Tah	❌ NE	✅ ANO	Střední
Cesta	❌ NE	❌ NE	Nejvyšší

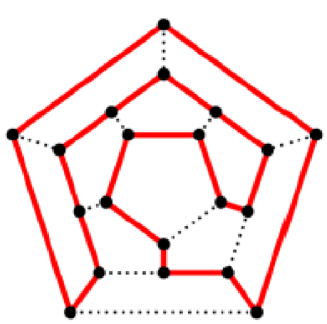
- **Eulerovský graf:** Tah, který projde každou HRANOU právě jednou a vrátíš se zpět. Existuje, pokud mají vrcholy sudý stupeň (Sudý počet hran).



- **Eulerovský tah:** Například kreslení domečku jedním tahem



- **Hamiltonovský graf:** Obsahuje kružnici procházející všemi VRCHOLY.



25. Ohodnocené grafy

Zadání z okruhů: Optimalizační algoritmy – minimální kostra, nejkratší cesta.

- Hrany mají ohodnocení $w: E \to \mathbb{R}$. (každé hraně je PŘIŘAZENO reálné číslo)
- **Minimální kostra:** Podgraf, který je stromem, obsahuje všechny vrcholy a má minimální součet vah. Strom je souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici.
- **Borůvkův/Kruskalův algoritmus:** Spojování VŠECH vrcholů nejlevnější hranou.
- **Nejkratší cesta:** Cesta z u do v s minimálním součtem vah.
- **Dijkstrův algoritmus:** Hledá nejkratší cestu ze startu do cíle