

MA2-M Ukázkové řešení - druhý test

Květen 2024

1 Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 3x^3 - 9xy + 3y^3$

Nejprve vypočítáme parciální derivace prvního řádu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 9x^2 - 9y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -9x + 9y^2\end{aligned}$$

Následně položíme výsledky parciálních derivací rovno nule, protože gradient v extrému musí být nula, a výsledek z parciální derivace podle x vyjádříme do parciální derivace podle y , takto získáme stacionární body:

Pro $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$9x^2 - 9y = 0 \implies 9x^2 = 9y \implies y = x^2$$

Pro $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$9x^4 - 9x = 0 \implies 9x(x^3 - 1) = 0 \implies 9x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Máme dva stacionární body $[0, 0]$ a $[1, 1]$ (diskriminant kvadratické rovnice je -3 , takže rovnice nemá reálné řešení), zde může a nemusí být extrém (stacionární body jsou v bodech, ve kterých jsou derivace nulové nebo neexistují). Pro tyto podezřelé body použijeme výpočet podle kvadratických forem. Pro tento postup použijeme druhé derivace.

Definice kvadratické formy

Nechť $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, i\}$. Řekneme, že kvadratická forma (funkce)

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_i x_j \quad (x = [x_1, \dots, x_n])$$

je pozitivně definitní, jestliže $Q(x) > 0$ pro všechna $x \neq [0, \dots, 0]$. Kvadratická forma Q je pozitivně semidefinitní, jestliže $Q(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a existuje-li bod $x \neq [0, \dots, 0]$ tak, že $Q(x) = 0$. Kvadratická forma Q je negativně definitní, jestliže $Q(x) < 0$ pro všechna $x \neq [0, \dots, 0]$. Kvadratická forma Q je negativně semidefinitní, jestliže $Q(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a existuje-li bod $x \neq [0, \dots, 0]$ tak, že $Q(x) = 0$. A existují-li body $y, z \in \mathbb{R}^n$ tak, že $Q(y) < 0$ a $Q(z) > 0$, říkáme, že kvadratická forma Q je indefinitní.

Postačující podmínka pro lokální extrém

Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ spojité všechny parciální derivace druhého řádu a nechť jsou v tomto bodě všechny parciální derivace prvního řádu rovny nule. Sestrojme kvadratickou formu

$$Q(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) \quad \text{kde } h \in \mathbb{R}^n.$$

Potom platí:

- Je-li Q pozitivně definitní, má funkce f v bodě c ostré lokální minimum.
- Je-li Q negativně definitní, má funkce f v bodě c ostré lokální maximum.
- Je-li Q indefinitní, nemá funkce f v bodě c lokální extrém.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -9$$

Pro bod $[0,0]$:

$$Q(a, b) = -18ab$$

Pro bod $[1,1]$:

$$Q(a, b) = 18a^2 - 18ab + 18b^2 = 18 \left(\left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \right)$$

Z výsledků můžeme usoudit že:

- V bodě $[0,0]$ je kvadratická forma indefinitní (protože obsahuje jen bilineární člen bez kvadratických členů) \implies **nemá lokální extrém**
- V bodě $[1,1]$ je kvadratická forma pozitivně definitní (upraveno na dva čtverce s kladným znaménkem) \implies **v bodě je lokální minimum**

2 Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině $x^2 + y^2 \leq 2$

Nutná podmínka pro vázaný extrém

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mají na okolí množiny $M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ spojité parciální derivace prvního řádu. Dále nechť v každém bodě množiny M je alespoň jedna parciální derivace prvního řádu funkce g různá od nuly. Má-li funkce f v bodě $a \in M$ lokální extrém v množině M , pak existuje konstanta λ (Lagrangeův multiplikátor) tak, že pro Lagrangeovu funkci

$$F(x) := f(x) + \lambda g(x)$$

jsou v bodě a splněny rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0 \text{ pro } i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ a } g(a) = 0.$$

Určíme si první derivace (hledáme podezřelé body na lokální extrém v zadané množině) a Lagrangeovu funkci (hledáme podezřelé body na vázaný extrém na hranici množiny). První derivace položíme rovno nule a najdeme podezřelý bod na lokální extrém: $[0, 0]$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial f}{\partial x} = y = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = x = 0 &\implies [0, 0] \\ \text{b) } L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2) \end{aligned}$$

Následně určíme parciální derivace vytvořené Lagrangeovy funkce podle x a y .

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + 2\lambda x \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + 2\lambda y \end{aligned}$$

Výsledky položíme rovno nule a rovnice od sebe odečteme, tím se zbavíme λ . Pro úspěšné odečtení musíme rovnice vynásobit chybějícím prvkem u λ složky.

$$\begin{aligned} y + 2\lambda x &= 0 / \cdot y \\ -x + 2\lambda y &= 0 / \cdot x \\ y^2 - x^2 &= 0 \\ (y - x)(y + x) &= 0 \implies y = \pm x. \end{aligned}$$

Následně můžeme dosadit do vazby $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2 = 0$, která určuje množinu, na které absolutní extrémy hledáme.

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 &= 2 \\2x^2 &= 2 \\x^2 &= 1 \\x_{1,2} &= \pm 1\end{aligned}$$

Připomínka

Pokud výsledkem parciálních derivací nebude takto jednoduchá soustava rovnic a nepůjde to jednoduše odečíst, je možné vyjádřit x a y z jejich parciálních derivací a dosadit poté do parciální derivace pouze podle λ . Tímto získáme jednu rovnici o jedné neznámé λ . Vzniklé výsledky následně dosadíme zpět do vyjádřených rovnic podle x a y a zjistíme tak vzniklé podezřelé body.

A nakonec spočteme funkční hodnoty v nalezených podezřelých bodech:

$$\begin{aligned}[0, 0] &\implies f(0, 0) = 0 \\[1, 1] &\implies f(1, 1) = 1 \\[1, -1] &\implies f(1, 1) = -1 \\[-1, 1] &\implies f(1, 1) = -1 \\[-1, -1] &\implies f(1, 1) = 1\end{aligned}$$

Z výsledků funkčních hodnot můžeme usoudit, že v bodě $[1, 1]$ a $[-1, -1]$ je absolutní maximum a v bodě $[1, -1]$ a $[-1, 1]$ je absolutní minimum.

3 Vyřešte diferenciální rovnici $xy' = 2y^2 + 8y + 8$, $y(1) = 1$

Upravíme diferenciální rovnici na jednodušší tvar a před provedením separace proměnných určíme podmínky:

$$\begin{aligned}x \frac{dy}{dx} &= 2(y+2)^2 \\ x &\neq 0 \\ y &\neq -2\end{aligned}$$

Tím dostaneme konstantní řešení zadané rovnice $y = -2$, které bohužel nevyhovuje počáteční podmínce. Tudíž se jako výsledek nepočítá.

Následně upravíme a zintegrujeme obě strany pro $y \neq -2$ a $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(y+2)^2} &= 2 \int \frac{dx}{x} \\ \frac{-1}{y+2} &= 2 \ln|x| + C\end{aligned}$$

Dosadíme počáteční podmínku a určíme konstantu C:

$$-\frac{1}{3} = 2 \ln 1 + C \implies C = -\frac{1}{3}$$

Nakonec dosadíme konstantu, zjistíme podmínky a určíme, na jakém intervalu existuje řešení diferenciální rovnice. $x > 0$, protože počáteční podmínka je vpravo od nuly a můžeme tedy odstranit absolutní hodnotu.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{y_p+2} &= 2 \ln x - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y_p+2} &= \frac{1}{3} - 2 \ln x \\ (y_p+2) &= \frac{1}{\frac{1}{3} - 2 \ln x} \quad \text{pro } \frac{1}{3} - 2 \ln x \neq 0 \\ \frac{1}{3} - 2 \ln x \neq 0 &\implies \ln x \neq \frac{1}{6} \implies x \neq e^{\frac{1}{6}} \\ y_p &= \frac{3}{1 - 6 \ln x} - 2, x \in (0, e^{\frac{1}{6}})\end{aligned}$$

4 Řešte diferenciální rovnici $y'' + 9y = \cos(2x)e^{3x}$

Ze zadání si určíme některé proměnné z pravé strany rovnice, které se budou hodit během následujících výpočtů.

$$\begin{aligned}P(x) = 1 &\implies Q(x) = A \\exp &= e^{3x} \implies \alpha = 3 \\gon &= \cos 2x \implies \beta = 2\end{aligned}$$

Nejprve hledáme řešení homogenní rovnice (pravou stranu diferenciální rovnice nahradíme nulou) ve tvaru $e^{\lambda x}$, po dosazení a úpravách dostaneme charakteristickou rovnici:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 9 &= 0 \\ \lambda^2 &= -9 \\ \lambda &= \pm 3i\end{aligned}$$

Řešení homogenní rovnice odpovídající $\lambda = a \pm bi$ je $y_h = e^{ax}(C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx))$, takže řešením homogenní rovnice je:

$$\begin{aligned}y_h &= e^{0x}(C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)) \\ y_h &= C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)\end{aligned}$$

Dále hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $e^{(\alpha+\beta i)x}x^m Q(x)$, kde m je násobnost kořene $\alpha \pm \beta i$ v charakteristickém polynomu (mělo by to tedy být buď nula nebo jedna) a pravou stranu nahradíme reálnou částí komplexní exponenciály $e^{(\alpha+\beta i)x}$.

V našem případě $m = 0$; $Q(x)$ je vždy stejného řádu jako $P(x)$. Partikulární řešení je tedy ve tvaru $e^{(3+2i)x}x^0 Q(x)$, musíme spočítat jeho druhou derivaci, abychom ji mohli dosadit do zadání

$$\begin{aligned}y_p &= e^{(3+2i)x}x^0 A \\ y_p &= e^{(3+2i)x} A \\ y_p' &= e^{(3+2i)x}(3+2i)A \\ y_p'' &= e^{(3+2i)x}(3+2i)(3+2i)A \\ y_p'' &= e^{(3+2i)x}(5+12i)A\end{aligned}$$

Nyní dosadíme do původního předpisu diferenciální rovnice. Partikulární řešení dosazujeme do zadání, kde na pravé straně exponenciálu a goniometrickou funkci nahradíme za $e^{(\alpha+\beta)x}$.

$$e^{(3+2i)x}(5 + 12i)A + 9(e^{(3+2i)x}A) = e^{(3+2i)x} / : e^{(3+2i)x}$$

$$(5 + 12i)A + 9A = 1$$

$$A(14 + 12i) = 1$$

$$A = \frac{1}{14 + 12i}$$

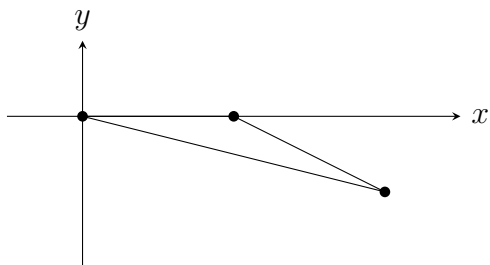
$$A = \frac{1}{14 + 12i} \frac{14 - 12i}{14 - 12i}$$

$$A = \frac{14 - 12i}{340} = \frac{7 - 6i}{170}$$

Po úpravě použijeme na y_p identitu $e^{\beta ix} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$. Obecné řešení je pak součet homogenního řešení a imaginární části partikulárního řešení pro rovnice se sinem (nebo reálné části partikulárního řešení pro rovnice s kosinem).

$$\begin{aligned} y_p &= \Re \left(e^{(3+2i)x} \frac{7 - 6i}{170} \right) \\ &= \Re \left(e^{3x} (\cos(2x) + i \sin(2x)) \frac{7 - 6i}{170} \right) \\ &= e^{3x} \Re \left(\frac{7 - 6i}{170} \cos(2x) + i \frac{7 - 6i}{170} \sin(2x) \right) \\ &= e^{3x} \Re \left(\frac{7 - 6i}{170} \cos(2x) + \frac{7i + 6}{170} \sin(2x) \right) \\ &= e^{3x} \left(\frac{7 \cos(2x)}{170} + \frac{6 \sin(2x)}{170} \right) \\ \implies y &= C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) + e^{3x} \frac{7 \cos(2x) + 6 \sin(2x)}{170}. \end{aligned}$$

- 5 Integrujte funkci $f(x, y) = 1 + \frac{1}{(2x+3y+4)^2}$ přes oblast určenou trojúhelníkem s vrcholy: $[4, -1]$, $[0, 0]$, $[2, 0]$.



Nejprve musíme zjistit hranice integrálu, trojúhelník si nakreslíme. Skoro vždy je potřeba rozdělit si trojúhelník na dva díly a integrovat zvlášť. Ideální je, pokud je nějaká strana trojúhelníku rovnoběžná s jednou z os, protože pak není dělení trojúhelníku nutné a vystačíme si s jedním integrálem.

Z obrázku můžeme vyčíst, že jedna strana leží přímo na ose x , můžeme tedy integrovat nejprve podle x a potom podle y a budeme mít jen jeden integrál. Meze pro y budou následovně:

$$y = -1$$

$$y = 0$$

Obecná rovnice přímky - výpočet

Mějme body $X = [0, 1]$ a $Y = [2, 3]$. Vypočítáme směrový vektor v a z něj určíme normálový vektor n .

$$\begin{aligned} & [0, 1] - [2, 3] \\ & v((2 - 0), (3 - 1)) \\ & n((3 - 1), -(2 - 0)) \implies n(2, -2) \end{aligned}$$

Následně do obecné rovnice přímky $ax + by + c = 0$ dosadíme za a a b hodnoty z normálového vektoru a za x a y dosadíme souřadnice například prvního bodu.

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ 2x - 2y + c &= 0 \\ -2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + c &= 0 \implies c = 2 \end{aligned}$$

A obecná rovnice přímky procházející body $X = [0, 1]$ a $Y = [2, 3]$ je $2x - 2y + 2 = 0$.

Meze integrace pro x určíme z rovnic příslušných přímek. Zbývá nám tedy zjistit rovnice přímek mezi body $[0, 0]; [4, -1]$ a $[2, 0]; [4, -1]$

$$\text{Pro } [0, 0]; [4, -1] : x = -4y$$

$$\text{Pro } [2, 0]; [4, -1] : x = -2y + 2$$

Máme tedy určené integrační meze a můžeme složit integrál. Vnější integrál je podle y a druhý, ten vnitřní, je podle x .

$$\int_{-1}^0 \int_{-4y}^{-2y+2} 1 + \frac{1}{(2x + 3y + 4)^2} dx dy$$

Vypočítáme:

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 \left[x - \frac{1}{2(2x + 3y + 4)} \right]_{x=-4y}^{x=-2y+2} dy = \\ &= \int_{-1}^0 -2y + 2 - (-4y) + \frac{1}{2} \frac{1}{4 + 3y - 8y} - \frac{1}{2} \frac{1}{4 + 3y + 2(2 - 2y)} dy = \\ &= \int_{-1}^0 2y + 2 + \frac{1}{2} \frac{1}{4 - 5y} - \frac{1}{2} \frac{1}{8 - y} dy = \\ &= \left[y^2 + 2y - \frac{1}{10} \ln |4 - 5y| + \frac{1}{2} \ln |8 - y| \right]_{-1}^0 = \\ &= 0^2 + 0 - (1 - 2) - \frac{1}{10} \ln 4 + \frac{1}{10} \ln 9 + \frac{1}{2} \ln 8 - \frac{1}{2} \ln 9 = \\ &= 1 - \frac{1}{10} \ln \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \ln \frac{8}{9}. \end{aligned}$$