MA2 - první zápočtový test

Úloha: Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

Řešení: Nejprve vypočteme parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x a y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y^2.$$

Protože obě parciální derivace existují v každém bodě, najdeme podezřelé body z rovnic $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Nejprve řešíme tedy soustavu rovnic:

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y \quad (1),$$
$$f_y = -3x + 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y^2 \quad (2).$$

Dosadíme $y = x^2$ z rovnice (1) do rovnice (2):

$$0 = (x^2)^2 - x \quad \Rightarrow \quad 0 = x(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Tato rovnice má řešení $x = 0$ nebo $x = 1$. Kvadratická rovnice nemá reálné kořeny, protože má záporný diskriminant. Pro každé z těchto řešení zjistíme odpovídající hodnoty y:

- Pro $x = 0$, z rovnice (1) dostáváme $y = 0$.
- Pro $x = 1$, z rovnice (1) dostáváme $y = 1$.

Podezřelé body tedy jsou $[0, 0]$ a $[1, 1]$.

Klasifikaci nalezených bodů provedeme pomocí druhých parciálních derivací a determinantu. Nejprve vypočteme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3.$$

Pro každý podezřelý bod spočteme determinant $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$.

1. Pro bod $[0, 0]$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 6(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 6(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -3.$$

$$D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0.$$

Tedy v bodě $[0, 0]$ není extrém.

2. Pro bod $[1, 1]$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6(1) = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6(1) = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -3.$$

$$D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27.$$

V bodě $[1, 1]$ je lokální minimum, protože $D > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) > 0$.

Závěr: V bodě $[1, 1]$ je lokální minimum.

Úloha: Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ na množině dané nerovností $x^2 + 4y^2 \leq 4$.

Řešení: Nejprve ověříme, že funkce $f(x,y) = x + y$ nemá lokální extrémy. Spočteme parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \neq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \neq 0.$$

Parciální derivace nejsou nulové v žádném bodě a tedy funkce nemá lokální extrémy.

Dále hledáme vázané extrémy na hranici. Použijeme Lagrangeovy multiplikátory, tedy hledáme extrémy $f(x,y)$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

Lagrangeova funkce je:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = (x+y) + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

Spočítáme parciální derivace Lagrangeovy funkce podle x, y a λ a hledáme, kde se rovnají nule:

- Derivace podle x: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 + \lambda(2x) = 0.$
- Derivace podle y: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 + \lambda(8y) = 0.$
- Derivace podle λ: $x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \quad$ (vazba).

Nyní první rovnici vynásobíme $4y$ a sečteme s $-x$ násobkem druhé, abychom eliminovali λ a dostaneme:

$$4y(1 + 2\lambda x) - x(1 + 8\lambda y) = 4y + 8\lambda xy - x - 8\lambda xy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4y.$$

Dosadíme $x = 4y$ do vazby $x^2 + 4y^2 = 4$ a najdeme řešení:

$$(4y)^2 + 4y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 16y^2 + 4y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 20y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Takže máme dva podezřelé body: $\left[\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ a $\left[\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right]$. Spočítáme hodnoty funkce $f(x,y) = x + y$:

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

$$f\left(\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-4}{\sqrt{5}} + \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}.$$

Závěr: Absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ na množině $x^2 + 4y^2 \leq 4$ jsou:

- Absolutní maximum: $f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$,
- Absolutní minimum: $f\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$.

Úloha: Vyřešte diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' + \frac{2y}{x} = \ln x.$$

Řešení: Jedná se o lineární diferenciální rovnici prvního řádu, kterou vyřešíme pomocí integračního faktoru, označme jej $IF(x)$. Předpokládáme, že $x > 0$. Rovnice je již v základním tvaru $y' + p(x)y = q(x)$, kde $p(x) = \frac{2}{x}$ a $q(x) = \ln x$. Integrační faktor spočítáme podle vzorce $IF(x) = e^{\int p(x)\,dx}$:

$$IF(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln(x^2)} = x^2.$$

Diferenciální rovnici nyní vynásobíme spočteným integračním faktorem:

$$x^2y' + 2xy = x^2 \ln x.$$

Levou stranu rovnice můžeme díky pravidlu pro derivaci součinu přepsat jako derivaci součinu hledané funkce y a integračního faktoru ($x^2y' + 2xy = (x^2y)'$):

$$(x^2y)' = x^2 \ln x.$$

Nyní obě strany rovnice zintegrujeme podle x:

$$x^2y = \int x^2 \ln x\,dx.$$

Pro výpočet integrálu na pravé straně použijeme metodu per partes. Zvolíme:

- $w = \ln x \Rightarrow w' = \frac{1}{x}$,
- $v' = x^2 \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$.

Po aplikaci vzorce $\int w\,v'\,dx \overset{C}{=} w\,v - \int v\,w'\,dx$ dostaneme:

$$\int x^2 \ln x\,dx \overset{C}{=} \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx \overset{C}{=} \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Výsledek integrace dosadíme zpět do rovnice:

$$x^2y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Obecné řešení získáme vydělením rovnice integračním faktorem x^2:

$$y(x) = \frac{x}{3}\ln x - \frac{x}{9} + Cx^{-2}, \quad x > 0.$$

Úloha: Vyřešte diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + 4y = xe^{-x}.$$

Řešení: Nejprve vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 4y = 0$. Převedeme derivace na mocniny a sestavíme charakteristickou rovnici:

$$k^2 + 4 = 0 \implies k^2 = -4.$$

Máme tedy komplexně sdružené kořeny $k = 0 \pm 2\mathrm{i}$. Tedy $\alpha = 0, \beta = 2$ a sestavíme řešení homogenní rovnice (exponenciální člen je $e^{0x} = 1$):

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Ve druhé části řešíme diferenciální rovnici se speciální pravou stranou (metodou odhadu). Pravá strana rovnice je $f(x) = xe^{-x}$. Jedná se o součin polynomu prvního stupně a exponenciály ($\alpha = -1$).

Nyní ověříme násobnost kořene -1 (rezonanci) v charakteristické rovnici. -1 není řešením charakteristické rovnice (kořeny jsou $\pm 2\mathrm{i}$). Rezonance tedy nenastává a odhad není třeba upravovat násobením x.

Řešení je tedy ve tvaru obecného polynomu prvního stupně vynásobeného exponenciálou z pravé strany:

$$y_p = (Ax + B)e^{-x}.$$

Spočítáme první derivaci pomocí pravidla pro derivaci součinu:

$$y_p' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (-Ax + A - B)e^{-x}.$$

Následně spočítáme druhou derivaci:

$$y_p'' = -Ae^{-x} - (-Ax + A - B)e^{-x} = (Ax - 2A + B)e^{-x}.$$

Vypočtené derivace dosadíme do původní zadané rovnice $y'' + 4y = xe^{-x}$:

$$(Ax - 2A + B)e^{-x} + 4(Ax + B)e^{-x} = xe^{-x}.$$

Celou rovnici můžeme vydělit kladným výrazem e^{-x} a dostaneme:

$$Ax - 2A + B + 4Ax + 4B = x.$$

Sloučíme členy s x a absolutní členy:

$$5Ax + (-2A + 5B) = x.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně dostaneme soustavu dvou rovnic:

- Pro x^1: $5A = 1 \implies A = \frac{1}{5}$.
- Pro x^0: $-2A + 5B = 0 \implies 5B = 2A \implies 5B = \frac{2}{5} \implies B = \frac{2}{25}$.

Dostali jsme tedy partikulární řešení:

$$y_p = \left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{25}\right)e^{-x}.$$

Celkové obecné řešení je součtem homogenního a partikulárního řešení:

$$y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{25}\right)e^{-x}.$$

Úloha: Spočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{\ln(x)}{y^2}\, dx\, dy,$$

kde Ω je lichoběžník s vrcholy $A = [1,1],\ B = [2,2],\ C = [2,4],\ D = [1,2]$.

Řešení: Body B a C mají stejnou souřadnici $x = 2$, takže pravá hranice oblasti je svislá úsečka $x = 2, y \in [2,4]$. Rovněž body A a D mají stejnou souřadnici $x = 1, y \in [1,2]$, takže levá hranice oblasti je svislá úsečka $x = 1$. Proto bude výhodnější integrovat nejprve podle y a poté podle x. Určíme rovnice zbývajících přímek:

- Přímka AB prochází body $[1,1]$ a $[2,2]$. Směrnice je

$$k = \frac{2-1}{2-1} = 1, \quad \text{tedy } y - 1 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = x.$$

- Přímka DC prochází body $[1,2]$ a $[2,4]$. Směrnice je

$$k = \frac{4-2}{2-1} = 2, \quad \text{tedy } y - 2 = 2(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x.$$

Oblast Ω je tedy tvořena body, pro které platí:

$$1 \le x \le 2, \quad x \le y \le 2x.$$

Tento popis můžeme snadno přepsat na dvojnásobný integrál:

$$\iint_{\Omega} \frac{\ln(x)}{y^2}\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_x^{2x} \frac{\ln(x)}{y^2}\, dy \right) dx.$$

Vnitřní integrál je vzhledem k y a tedy $\ln(x)$ je konstanta:

$$= \int_1^2 \ln(x) \left(\int_x^{2x} \frac{1}{y^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 \ln(x) \left[-\frac{1}{y} \right]_x^{2x} dx = \int_1^2 \ln(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \right) dx.$$

Zjednodušíme:

$$= \int_1^2 \ln(x) \cdot \frac{1}{2x}\, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\, dx.$$

Nyní použijeme substituci:

$$u = \ln(x), \quad du = \frac{1}{x}\, dx.$$

Při změně mezí:

$$x = 1 \Rightarrow u = \ln(1) = 0, \quad x = 2 \Rightarrow u = \ln(2).$$

Integrál tedy přejde na:

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} u\,du = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{4}(\ln(2))^2.$$

Celkem tedy máme:

$$\iint_\Omega \frac{\ln(x)}{y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{4}(\ln(2))^2.$$