MA2 - druhý zápočtový test

1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$.

Spočteme první derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 9y^2 + 30x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 18xy + 54y.$$

Derivace ve všech bodech existují, takže položíme derivace rovny nule a řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{cases} 6x^2 + 9y^2 + 30x = 0 \\ 18xy + 54y = 0. \end{cases}$$

Z druhé rovnice vyjádříme:

$$18y(x+3) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{nebo} \quad x = -3$$

a dosadíme do první rovnice:

Případ 1: $y = 0 \Rightarrow 6x(x+5) = 0 \Rightarrow x = 0$ nebo $x = -5$

$$\Rightarrow \text{Podezřelé body: } [0,0], [-5,0]$$

Případ 2: $x = -3 \Rightarrow -36 + 9y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$$\Rightarrow \text{Podezřelé body: } [-3,2], [-3,-2]$$

Spočítáme druhé derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 30, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18x + 54, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18y$$

a v každém bodě postupně spočítáme determinant:

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Na závěr provedeme klasifikaci nalezených podezřelých bodů:

- **Bod** $[0,0]$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 30$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 54$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \Rightarrow D = 1620 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0 \Rightarrow$ **lokální minimum**,
- **Bod** $[-5,0]$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-5,0) = -30$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-5,0) = -36$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-5,0) = 0 \Rightarrow D = 1080 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-5,0) < 0 \Rightarrow$ **lokální maximum**,
- **Bod** $[-3,2]$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,2) = -6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3,2) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-3,2) = 36 \Rightarrow D = -1296 < 0 \Rightarrow$ **sedlový bod**,
- **Bod** $[-3,-2]$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,-2) = -6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3,-2) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-3,-2) = -36 \Rightarrow D = -1296 < 0 \Rightarrow$ **sedlový bod**.

Závěr

- **Lokální minimum:** $[0, 0]$,
- **Lokální maximum:** $[-5, 0]$,
- **Sedlové body:** $[-3, 2]$, $[-3, -2]$.

2. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 6y$ na množině určené podmínkou $x^2 + y^2 \leq 4$.

Nejprve se podíváme, jestli funkce má lokální extrémy uvnitř oblasti. Spočítáme první parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6.$$

Podezřelé body splňují:

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3, \quad 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3.$$

Bod $[3,\ -3]$ však neleží uvnitř dané oblasti, protože: $3^2 + (-3)^2 = 18 > 4$.

Dále se podíváme na extrémy na hranici. Body na hranici splňují podmínku (vazbu): $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Eliminací Lagrangeova multiplikátoru dostaneme (rovnoběžnost gradientů):

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

kde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y.$$

Dosadíme:

$$(2x-6)(2y)-(2y+6)(2x) = 4xy-12y-4xy-12x = -12x-12y = -12(x+y) = 0.$$

Tedy: $y = -x$. Dosadíme do podmínky $g(x,y) = 0$:

$$g(x,-x) = x^2 + (-x)^2 = 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2},\ y = -x = \mp\sqrt{2}.$$

Nakonec spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je:

- $f(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}) = 2 + 2 - 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 4 - 12\sqrt{2}$,
- $f(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}) = 2 + 2 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4 + 12\sqrt{2}$.

Závěr

- **Absolutní minimum:** $f(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}) = 4 - 12\sqrt{2}$ v bodě $[\sqrt{2},\ -\sqrt{2}]$.
- **Absolutní maximum:** $f(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}) = 4 + 12\sqrt{2}$ v bodě $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$.

3. Vyřešte diferenciální rovnici $y'x - y = x^2 \ln x$.

Jedná se o lineární diferenciální rovnici, takže řešení budeme hledat ve tvaru součinu dvou funkcí $u(x)$ a $v(x)$. Předpokládáme, že $x > 0$. Zderivujeme součin:

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Dosadíme do původní rovnice $y'x - y = x^2 \ln x$:

$$(u'(x)v(x) + u(x)v'(x))x - u(x)v(x) = x^2 \ln x.$$

Rovnice se nyní upraví na:

$$xu'(x)v(x) + xu(x)v'(x) - u(x)v(x) = x^2 \ln x.$$

Tuto rovnici rozdělíme na dvě části:

$$xu'(x)v(x) + u(x)\left(xv'(x) - v(x)\right) = x^2 \ln x.$$

Nejprve hledáme $v(x)$ tak, že bude nenulovým partikulárním řešením homogenní rovnice:

$$xv'(x) - v(x) = 0.$$

Jedním z řešení je $v(x) = 0$ a pro $v(x) \neq 0$ lze tuto rovnici přepsat jako:

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}.$$

Integrujeme:

$$\ln|v(x)| = \ln x + C_1 \quad \Rightarrow \quad |v(x)| = e^{\ln|v(x)|} = e^{\ln x + C_1} = xe^{C_1}.$$

Odstraníme absolutní hodnotu

$$v(x) = \begin{cases} xe^{C_1} & \text{pro } v(x) > 0 \\ x \cdot 0 & \text{pro } v(x) = 0 \\ -xe^{C_1} & \text{pro } v(x) < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v(x) = C_2 x, \quad \text{kde } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Volíme tedy nejjednodušší možnost $v(x) = x$. Výsledek dosadíme druhé části rovnice:

$$xu'(x)x = x^2 \ln x \quad \Rightarrow \quad x^2 u'(x) = x^2 \ln x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \ln x.$$

Tuto rovnici řešíme integrací podle x:

$$u(x) = \int \ln x \, dx.$$

Pro tento integrál použijeme metodu per-partes. Zvolíme $w = \ln x$ a $dv = dx$. Potom $dw = \frac{1}{x}\,dx$ a $v = x$, takže:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C_3 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x \ln x - x + C_3.$$

Celkem tedy máme: $v(x) = x$, $u(x) = x \ln x - x + C_3$ a:

$$y(x) = u(x)v(x) = (x \ln x - x + C_3) \cdot x.$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$y(x) = x^2 \ln x - x^2 + C_3 x.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice je:

$$y(x) = x^2 \ln x - x^2 + C_3 x,$$

kde C_3 je integrační konstanta, která závisí na počáteční podmínce.

4. Vyřešte diferenciální rovnici $y'' + 9y = 18x^2 - 3x - 5$.

Nejprve řešíme homogenní rovnici:

$$y'' + 9y = 0.$$

Charakteristická rovnice je:

$$r^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 3i.$$

Řešení homogenní rovnice je:

$$y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x),$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty.

Nyní hledáme konkrétní řešení nehomogenní rovnice:

$$y'' + 9y = 18x^2 - 3x - 5.$$

Předpokládáme, že partikulární řešení je polynom druhého stupně:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

kde A, B a C jsou neznámé konstanty.

Spočítáme derivace:

$$y_p'(x) = 2Ax + B, \quad y_p''(x) = 2A.$$

Dosadíme do rovnice:

$$2A + 9(Ax^2 + Bx + C) = 18x^2 - 3x - 5 \quad \Rightarrow \quad 9Ax^2 + 9Bx + (9C + 2A) = 18x^2 - 3x - 5.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin, dostaneme následující podmínky:

- Pro x^2: $9A = 18 \quad \Rightarrow \quad A = 2$,
- Pro x^1: $9B = -3 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{3}$,
- Pro x^0: $2A + 9C = -5 \quad \Rightarrow \quad 4 + 9C = -5 \quad \Rightarrow \quad C = -1$.

Tedy partikulární řešení je:

$$y_p(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x - 1.$$

Celkové řešení je součtem homogenního a partikulárního řešení:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + 2x^2 - \frac{1}{3}x - 1.$$

Toto je obecné řešení diferenciální rovnice. Pokud by byly dány počáteční podmínky, lze určit konstanty c_1 a c_2.

5. Integrujte funkci $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$ přes oblast určenou trojúhelníkem s vrcholy: $[1,1]$, $[1,3]$, $[3,3]$.

Strany trojúhelníka jsou:

- AB: svislá úsečka — rovnice $x = 1$, $y \in [1,3]$,
- BC: vodorovná úsečka — rovnice $y = 3$, $x \in [1,3]$,
- AC: šikmá úsečka mezi body A a C.

Rovnice úsečky AC: Směrnice je

$$k = \frac{3-1}{3-1} = 1,$$

a úsečka tedy má rovnici:

$$y - 1 = 1(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = x \quad x \in [1,3].$$

S ohledem na tvar oblasti je jedno, v jakém pořadí budeme integrovat. Ukážeme si tedy obě možnosti.

Integrace v pořadí $dx\,dy$

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le y \le 3,\ 1 \le x \le y\right\}$$

Potom:

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^3 \int_1^y \frac{x}{y^2}\,dx\,dy.$$

Vnitřní integrál:

$$\int_1^y \frac{x}{y^2}\,dx = \frac{1}{y^2}\int_1^y x\,dx = \frac{1}{y^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^y = \frac{1}{y^2}\left(\frac{y^2-1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2y^2}.$$

Vnější integrál:

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2y^2}\right) dy = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{1}{2}\left(\int_1^3 1\,dy - \int_1^3 \frac{1}{y^2}\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((3-1) - \left[-\frac{1}{y}\right]_1^3\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Integrace v pořadí $dy\,dx$

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le x \le 3,\ x \le y \le 3\right\}$$

Potom:

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,dy\,dx = \int_1^3 \int_x^3 \frac{x}{y^2}\,dy\,dx.$$

Vnitřní integrál:

$$\int_x^3 \frac{x}{y^2}\,dy = x\int_x^3 y^{-2}\,dy = x\left[-\frac{1}{y}\right]_x^3 = x\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{x}{3}.$$

Vnější integrál:

$$\int_1^3 \left(1-\frac{x}{3}\right)dx = \int_1^3 1\,dx - \int_1^3 \frac{x}{3}dx = 2-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 2-\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{2} = 2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Hodnota integrálu je v obou případech:

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,dx\,dy = \frac{2}{3}.$$