

## MA2 - první zápočtový test

### 1. Určete obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^{-1} (x-1)^n 4^n.$$

Pomocí **limitního podílového kritéria pro absolutní konvergenci** určíme:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1} (x-1)^{n+1} (n+2)}{(n+3) 4^n (x-1)^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4(x-1)(n+2)}{(n+3)} \right| = 4|x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+3} \right) \\ &= 4|x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2/n}{1+3/n} \right) = 4|x-1| \end{aligned}$$

Řada konverguje, jestliže:

$$4|x-1| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-1| < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x \in \left( \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right)$$

Nyní prověříme konvergenci na okrajích intervalu:

**Bod**  $x = \frac{3}{4}$

Dosadíme bod a řada má tvar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$$

Jedná se o alternující řadu, takže použijeme **Leibnizovo kritérium**:

- $a_n = \frac{1}{n+2} > 0$
- $a_n$  je klesající
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Všechny podmínky jsou splněny a řada tedy **konverguje**.

**Bod**  $x = \frac{5}{4}$

Dosadíme bod a řada má tvar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

Použijeme **integrální kritérium**: Zvolíme funkci  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ , která je na intervalu  $[1, \infty)$  kladná, spojitá a klesající.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x+2} dx = [\ln(x+2)]_1^{\infty} = \infty$$

A řada tedy **diverguje**.

## Závěr

Obor konvergence řady je:

$$x \in \left[ \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right)$$

**2. Spočtěte limitu:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{y^2 - x^2}{y^3 + x^3}$ .

Po dosazení limitního bodu zjistíme, že se jedná o limitu typu 0/0. Zkusíme, jestli nejde něco zkrátit.

**Čítatel:**

$$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$$

**Jmenovatel:**

$$y^3 + x^3 = (y + x)(y^2 - xy + x^2)$$

Po dosazení těchto úprav dostaneme:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{y^2 - x^2}{y^3 + x^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{(y - x)(y + x)}{(y + x)(y^2 - xy + x^2)}$$

a po zkrácení již lze limitu vyřešit dosazením:

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{y - x}{y^2 - xy + x^2} = \frac{1 - (-1)}{1^2 - 1 \cdot (-1) + (-1)^2} = \frac{2}{3}$$

**3. Rovnici  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  transformujte do nových nezávisle proměnných  $u = \frac{x}{y}$ ,  $v = y$ . Předpokládejte, že funkce  $f$  má spojitě parciální derivace.**

## Invertibilita transformace

Máme transformaci:

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = y.$$

Aby byla tato transformace invertibilní, musíme být schopni vyjádřit původní proměnné  $x$  a  $y$  jako funkce nových proměnných  $u$  a  $v$ . Z rovnic:

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = y$$

můžeme vyjádřit  $y = v$  přímo. Dále můžeme vyjádřit  $x$  z rovnice  $u = \frac{x}{y}$ :

$$x = u \cdot y = u \cdot v.$$

Tedy inverzní transformace je:

$$x = uv, \quad y = v.$$

Tedy tato transformace je invertibilní, pokud  $y \neq 0$ , protože pro každou hodnotu  $(u, v)$  existuje jednoznačně určená hodnota  $(x, y)$ , a to podle vzorců  $x = uv$  a  $y = v$ .

## 2. Výpočet parciálních derivací podle $x$ a $y$

Chceme zjistit, jak se funkce  $f$  chová v nových proměnných  $u$  a  $v$ . Použijeme větu o derivaci složené funkce.

### 2.1) Derivace podle $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Máme:

$$u = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y},$$

$$v = y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Tedy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial u}.$$

### 2.2) Derivace podle $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Máme:

$$u = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2},$$

$$v = y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Tedy:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

## 3. Transformace původní rovnice

Máme původní rovnici:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Dosadíme za  $x$ ,  $y$  a výrazy pro  $\frac{\partial f}{\partial x}$  a  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :

$$uv \left( \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + v \left( -\frac{u}{v} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0.$$

Zjednodušíme jednotlivé členy:

$$u \frac{\partial f}{\partial u} - u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

První dva členy se navzájem ruší, takže zbývá:

$$v \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

#### 4. Závěr

Rovnice se tedy zjednoduší na:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Tato rovnice říká, že funkce  $f$  nezávisí na proměnné  $v$ , což znamená, že  $f$  závisí pouze na  $u = \frac{x}{y}$ . Takže řešení původní rovnice je funkce  $f$  v závislosti na  $u$ , tedy:

$$f(x, y) = g \left( \frac{x}{y} \right),$$

kde  $g$  je libovolná funkce se spojitou derivací.

**4. Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě  $[1, -1]$  pro funkci  $f(x, y) = y e^{x^2+y^2-2} + \frac{\sin(xy+1)}{x}$ .**

Chceme spočítat Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě  $[1, -1]$ .

1. Výpočet hodnoty funkce v bodě  $[1, -1]$ :

$$f(1, -1) = (-1)e^{1^2+(-1)^2-2} + \frac{\sin(1 \cdot (-1) + 1)}{1} = -e^0 + \frac{\sin(0)}{1} = -1.$$

2. Výpočet první parciální derivace podle  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot e^{x^2+y^2-2} \cdot 2x + \cos(xy+1) \cdot y \cdot \frac{1}{x} - \sin(xy+1) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Vyhodnocení v bodě  $[1, -1]$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = (-1) \cdot e^0 \cdot 2(1) + \cos(0) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{1} - \sin(0) \cdot \frac{1}{1^2} = -2 - 1 = -3.$$

3. Výpočet první parciální derivace podle  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+y^2-2} + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2-2} + \cos(xy+1).$$

Vyhodnocení v bodě  $[1, -1]$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = e^0 + 2(-1)^2 e^0 + \cos(0) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

4. Výpočet druhé parciální derivace dvakrát podle  $x$ :

První člen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( y \cdot e^{x^2+y^2-2} \cdot 2x \right) = y \cdot e^{x^2+y^2-2} \cdot (2 + 4x^2).$$

Druhý člen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \cos(xy + 1) \cdot y \cdot \frac{1}{x} \right) = -\sin(xy + 1) \cdot y^2 \cdot \frac{1}{x} + \cos(xy + 1) \cdot y \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right).$$

Třetí člen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\sin(xy + 1) \cdot \frac{1}{x^2} \right) = -\cos(xy + 1) \cdot y \cdot \frac{1}{x^2} + 2\sin(xy + 1) \cdot \frac{1}{x^3}.$$

Vyhodnocení v bodě  $[1, -1]$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = -1 \cdot e^0(2+4) - \sin(0) + \cos(0) + \cos(0) + 2\sin(0) = -6 + 2 = -4.$$

5. Výpočet druhé parciální derivace dvakrát podle  $y$

První člen:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( e^{x^2+y^2-2} \right) = 2y \cdot e^{x^2+y^2-2}.$$

Druhý člen:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( 2y^2 e^{x^2+y^2-2} \right) = 4y \cdot e^{x^2+y^2-2} + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2-2} \cdot 2y.$$

Třetí člen:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\cos(xy + 1)) = -x \cdot \sin(xy + 1).$$

Vyhodnocení v bodě  $[1, -1]$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = -2 \cdot e^0 - 4 \cdot e^0 - 4 \cdot e^0 - \sin(0) = -10.$$

6. Výpočet druhé parciální derivace podle  $y$  a  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{x^2+y^2-2} + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2-2} + \cos(xy + 1) \right) \\ &= e^{x^2+y^2-2} \cdot 2x + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2-2} \cdot 2x - y \cdot \sin(xy + 1). \end{aligned}$$

Vyhodnocení v bodě  $[1, -1]$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1) = 2 \cdot e^0 + 4 \cdot e^0 + \sin(0) = 6.$$

7. Taylorův polynom druhého stupně v bodě  $[1, -1]$  je dán vzorcem:

$$P_2(x, y) = f(1, -1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)(y + 1) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1)(x - 1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1)(x - 1)(y + 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1)(y + 1)^2 \right].$$

Po dosazení hodnot:

$$P_2(x, y) = -1 - 3(x - 1) + 4(y + 1) + \frac{1}{2} [-4(x - 1)^2 + 2 \cdot 6(x - 1)(y + 1) - 10(y + 1)^2].$$

**5. Určete, zda křivka určená implicitně rovnicí  $F(x, y) = x + 2x^3 - 3xy^2 - y^3 + y = 0$  leží v okolí bodu  $[-1, 1]$  nad tečnou nebo pod tečnou. Napište rovnici této tečny.**

**1. Ověření, že bod  $[-1, 1]$  leží na křivce**

$$F(-1, 1) = -1 + 2(-1)^3 - 3(-1)(1)^2 - (1)^3 + 1 = -1 - 2 + 3 - 1 + 1 = 0.$$

**Závěr:** Bod  $[-1, 1]$  leží na křivce.

**2. Ověření existence funkce  $y = y(x)$  pomocí věty o implicitní funkci**

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy - 3y^2 + 1 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1, 1) = 6 - 3 + 1 = 4 \neq 0.$$

**Závěr:** V okolí bodu  $[-1, 1]$  existuje jednoznačná hladká funkce  $y = y(x)$ , která splňuje rovnici  $F(x, y(x)) = 0$ .

**3. První derivace  $\frac{dy}{dx}$**

Implicitně derivujeme rovnici  $F(x, y(x)) = 0$ :

$$\frac{d}{dx}(x + 2x^3 - 3xy^2 - y^3 + y) = 0.$$

Použijeme pravidla pro derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F(x, y) &= 1 + 6x^2 - 3y^2 - 6xy\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0 \\ \Rightarrow \quad (-6xy - 3y^2 + 1)\frac{dy}{dx} &= -1 - 6x^2 + 3y^2 \\ \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{-1 - 6x^2 + 3y^2}{-6xy - 3y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Dosadíme bod  $[-1, 1]$ :

$$\frac{dy}{dx}(-1, 1) = \frac{-1 - 6(-1)^2 + 3(1)^2}{-6(-1)(1) - 3(1)^2 + 1} = \frac{-1 - 6 + 3}{6 - 3 + 1} = \frac{-4}{4} = -1.$$

**Tečna má směrnici  $-1$ .** Z zadaného bodu  $[-1, 1]$  a z vypočtené směrnice  $-1$  získáme **rovnici tečny**:

$$y - 1 = -1(x + 1) \quad \Rightarrow \quad y = -x.$$

#### 4. Druhá derivace $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$\frac{d}{dx} \left( 1 + 6x^2 - 3y^2 - 6xy \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0 \right).$$

$$12x - 6y \frac{dy}{dx} - 6 \left( y \frac{dy}{dx} + x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + xy \frac{d^2y}{dx^2} \right) - 3 \left( 2y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 \frac{d^2y}{dx^2} \right) + \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Seskupíme podle  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$0 = 12x - 6y \frac{dy}{dx} - 6y \frac{dy}{dx} - 6x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 6y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + (-6xy - 3y^2 + 1) \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$\Rightarrow (-6xy - 3y^2 + 1) \frac{d^2y}{dx^2} = -12x + 12y \frac{dy}{dx} + 6(x + y) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2,$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-12x + 12y \frac{dy}{dx} + 6(x + y) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}{-6x - 3y^2 + 1}.$$

Dosadíme  $x = -1$ ,  $y = 1$ ,  $\frac{dy}{dx} = -1$ :

$$\text{čitatel: } -12(-1) + 12 \cdot 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1 + 1) = 12 - 12 + 0 = 0,$$

$$\text{jmenovatel: } -6(-1) - 3 \cdot 1 + 1 = 6 - 3 + 1 = 4.$$

Tedy:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(-1, 1) = \frac{0}{4} = 0.$$

Dosadíme přímku  $y = -x$  do rovnice křivky:

$$\begin{aligned} F(x, -x) &= x + 2x^3 - 3x(-x)^2 - (-x)^3 + (-x) \\ &= x + 2x^3 - 3xx^2 + x^3 - x \\ &= (x - x) + (2x^3 - 3x^3 + x^3) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

**Závěr:** Příмка  $y = -x$  splňuje rovnici  $F(x, y) = 0$  pro všechna  $x$  a tedy v okolí bodu  $[-1, 1]$  křivka leží na tečně — **tečna je součástí křivky**.