

## 1. test MA2 – ukázkové řešení

### 1. Určete obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(x+5)^n 2^{-n}$$

K určení oboru konvergence této řady využijeme limitní podílové kritérium, které říká, že *pokud platí*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , *je*  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *absolutně konvergentní*.

Do levé strany nerovnosti tedy dosadíme  $n$ -tý a  $(n+1)$ -ní člen řady a limitu vyřešíme.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^{-1}(x+5)^{n+1} 2^{-(n+1)}}{n^{-1}(x+5)^n 2^{-n}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(x+5)^{n+1} 2^n}{(n+1)(x+5)^n 2^{n+1}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(x+5)^n (x+5) 2^n}{(n+1)(x+5)^n 2^n \cdot 2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(x+5)}{(n+1) \cdot 2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(x+5)}{n(1 + \frac{1}{n}) \cdot 2} \right| = \frac{|x+5|}{2} \end{aligned}$$

Vyřešíme nerovnici s upravenou levou stranou.

$$\begin{aligned} \frac{|x+5|}{2} &< 1 \\ |x+5| &< 2 \\ x &\in (-7; -3) \end{aligned}$$

Řešení nalezneme s využitím číselné osy. Nulový bod absolutní hodnoty je  $-5$  a vzdálenost od něj má být menší než  $2$ . Výsledkem je tedy **interval  $x \in (-7; -3)$ , ve kterém řada absolutně konverguje**. O konvergenci řady v krajních bodech intervalu musíme rozhodnout pomocí jiných kritérií konvergence.

Hraniční body intervalu dosadíme do předpisu řady.

Nejprve dosadíme  $x = -7$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(-7+5)^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(-2)^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(-1)^n 2^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

O konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  můžeme rozhodnout pomocí Leibnizova kritéria:

*Nechť  $\forall n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ . Potom je řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  konvergentní právě tehdy, je-li splněna nutná podmínka konvergence, tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .*

Řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  upravíme do tvaru uvedeného v Leibnizově kritériu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{-1} \cdot \frac{1}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

Do podmínky konvergence dosadíme  $n$ -tý člen posloupnosti, tedy  $\left(\frac{1}{n}\right)$ , a limitu spočítáme.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Podmínka konvergence je splněna a tedy původní řada na základě Leibnizova kritéria v bodě  $x = -7$  konverguje.

A dále dosadíme  $x = -3$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(-3+5)^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} 2^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Řadě  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  se říká harmonická a víme o ní, že nekonverguje. Pokud bychom tuto znalost neměli, využijeme integrálního kritéria:

*Necht  $k \in \mathbb{N}$  a funkce  $f$  je spojitá, nerostoucí a nezáporná na intervalu  $\langle k; \infty \rangle$ . Potom je řada  $\sum_{k=1}^{\infty} f(n)$  konvergentní právě tehdy, když  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_k^n f(x) dx < \infty$ .*

V našem případě je  $f(x) = \frac{1}{x}$ , která je spojitá, nerostoucí a nezáporná na intervalu  $\langle 1; \infty \rangle$ . Potřebujeme tedy spočítat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln x]_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

Protože limita vyšla  $\infty$ , tak z integrálního kritéria plyne, že původní řada v bodě  $x = -3$  nekonverguje.

Celkem tedy máme, že řada je konvergentní pro  $x \in \langle -7; -3 \rangle$ .

## 2. Spočítejte limitu:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{2y - x + 3}{y - 2x + 3}$$

Aby limita mohla existovat, musí být splněna nutná podmínka existence limity.

*Existují-li limity  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y_0)$  a  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0; y)$  a jsou různé, potom  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x; y)$  neexistuje. Pokud by limity  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y_0)$  a  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0; y)$  byly stejné, potom je jim  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x; y)$  buď rovna, nebo neexistuje.*

Ověříme tedy platnost nutné podmínky existence limity.

$$y = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2 - x + 3}{-1 - 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + 1}{-2x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + 1}{2(-x + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow -1} \frac{2y - 1 + 3}{y - 2 + 3} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{2y + 2}{y + 1} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{2(y + 1)}{y + 1} = 2$$

Jak vidíme, **nutná podmínka existence limity nebyla splněna, limita tedy neexistuje.**

K určení limity můžeme zvolit i jiný postup. Má-li funkce v daném bodě limitu, nalezneme ji, budeme-li se k danému bodu pohybovat po jakékoli křivce (resp. k limitě v daném bodě se musíme dostat po všech křivkách).

K bodu, v němž limitu počítáme, se budeme blížit po všech přímkách. V takovém případě najdeme předpis všech přímek, které prochází bodem  $[1; -1]$  a zapíšeme ho ve směrnicovém tvaru, tedy  $y = k(x - 1) - 1$ . Zda jsme předpis přímky zapsali správně, můžeme ověřit dosazením souřadnic zadaného bodu, rovnost musí být pravdivá. Číslo  $k$  se nazývá směrnice přímky a udává její sklon. Směrnicový předpis přímky dosadíme do limity za  $y$  a limitu spočítáme.

Vyjde-li limita závislá na  $k$ , v daném bodě neexistuje. Pokud vyjde na  $k$  nezávislá, existovat může, ale nemusí!. V takovém případě bychom museli využít další způsoby určování limit v daném bodě, např. *větu o limitě sevřené funkce* nebo *transformaci do polárních souřadnic*.

$$p : y = k(x - 1) - 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(k(x - 1) - 1) - x + 3}{k(x - 1) - 1 - 2x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2kx - 2k - 2 - x + 3}{kx - k - 1 - 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(2k - 1) - 2k + 1}{x(k - 2) - k + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2k - 1)(x - 1)}{(k - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2k - 1}{k - 2} = \frac{2k - 1}{k - 2} \end{aligned}$$

**Limita vyšla závislá na  $k$ , opět tedy doházíme k závěru, že limita neexistuje.**

3. **Diferenciální rovnici  $x^2 f''(x) - 3x f'(x) + 6f(x) = 0$  transformujte zavedením nové nezávislé proměnné  $t$  vztahem  $x = e^t, (x > 0)$ . Předpokládejte, že funkce  $f$  má spojitou derivaci druhého řádu.**

Chceme-li řešit diferenciální rovnice, bývá zavedení nových proměnných často výhodné.

Pro nahrazení proměnné  $x$  proměnnou  $t$  dle zadání určíme nejprve první a druhou derivaci funkce  $f$ , do které následně dosadíme  $x = e^t$  (a tedy  $1 dx = e^t dt$ ). Jedná se o aplikaci věty o derivaci složené funkce. Ještě ověříme vzájemnou jednoznačnost transformace:  $\ln x = t$ , pro  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{df}{dx} \frac{dt}{dt} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{df}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \rightarrow \frac{df}{dt} \frac{1}{e^t} = \frac{df}{dt} e^{-t} \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{df}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \frac{df}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dt} e^{-t} \right) \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \\ &= \left( \frac{d^2 f}{dt^2} e^{-t} - \frac{df}{dt} e^{-t} \right) e^{-t} = \frac{d^2 f}{dt^2} e^{-2t} - \frac{df}{dt} e^{-2t} \end{aligned}$$

Pozn.: Při výpočtu druhé derivace jsme ve čtvrtém kroku za  $\frac{df}{dx}$  dosadili výsledek první derivace. V závorce pátého kroku je derivace součinu.

Vztah  $x = e^t$  a derivace upravené pro proměnnou  $t$  dosadíme do původní diferenciální rovnice a upravíme.

$$\begin{aligned} e^{2t} \left( e^{-2t} \frac{d^2 f}{dt^2}(t) - e^{-2t} \frac{df}{dt}(t) \right) - 3e^t e^{-t} \frac{df}{dt}(t) + 6f(t) &= 0 \\ \frac{d^2 f}{dt^2}(t) - \frac{df}{dt}(t) - 3 \frac{df}{dt}(t) + 6f(t) &= 0 \\ \frac{d^2 f}{dt^2}(t) - 4 \frac{df}{dt}(t) + 6f(t) &= 0 \end{aligned}$$

Upravenou diferenciální rovnici můžeme zapsat i ve tvaru

$$f''(t) - 4f'(t) + 6f(t) = 0.$$

Formálně správnější je přeznačit funkci takto:  $g(t) := f(e^t)$  a výsledek by pak tedy vypadal takto:

$$g''(t) - 4g'(t) + 6g(t) = 0.$$

4. Určete Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě  $[1; -1]$  pro funkci:

$$f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3xy - 3y + 2y^2 - 1$$

Taylorův polynom funkce  $f$  v bodě  $a$  je polynom, který má v bodě  $a$  stejnou funkční hodnotu jako  $f$  a stejnou hodnotu derivací až do řádu rovnému stupni polynomu. Pro funkci dvou proměnných je vztah pro určení Taylorova polynomu třetího stupně v bodě  $[a; b]$  následující:

$$\begin{aligned} T_3(x, y) = & f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \\ & + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 \right) + \\ & + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b)(x - a)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b)(x - a)^2(y - b) + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a, b)(x - a)(y - b)^2 \right) \end{aligned}$$

Abychom mohli do vztahu dosadit, spočítáme nejprve funkční hodnotu v bodě  $[1; -1]$  a parciální derivace funkce  $f(x; y)$  až do 3. řádu. I do nich dosadíme souřadnice zadaného bodu  $[1; -1]$ .

$$f(1; -1) = 1 + 2 - 3 + 3 + 2 - 1 = 4$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 4xy + 3y \quad \implies \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1; -1) = 3 + 4 - 3 = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x^2 + 3x - 3 + 4y \quad \implies \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1; -1) = -2 + 3 - 3 - 4 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x - 4y \quad \implies \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1; -1) = 6 + 4 = 10 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -4x + 3 \quad \implies \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1; -1) = -4 + 3 = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= 6 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} &= -4 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= 0 \end{aligned}$$

Nyní parciální derivace dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom a tvar zjednodušíme.

$$T_3(x, y) = 4 + 4(x - 1) - 6(y + 1) + \frac{1}{2} \left( 10(x - 1)^2 + 2(-1)(x - 1)(y + 1) + 4(y + 1)^2 \right) + \\ + \frac{1}{6} \left( 6(x - 1)^3 + 3(-4)(x - 1)^2(y + 1) \right)$$

$$T_3(x, y) = 4 + 4(x - 1) - 6(y + 1) + 5(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 1) + 2(y + 1)^2 + (x - 1)^3 - 2(x - 1)^2(y + 1)$$

Pozn.: Polynom není nutné dále upravovat, v tomto tvaru je dostačující.

5. Určete, zda křivka určená implicitně rovnicí

$F(x, y) = x + 2x^3 - 3xy - y^3 + e^{x-y} = 0$  leží v okolí bodu  $[1;1]$  nad tečnou nebo pod tečnou. Napište rovnici této tečny.

Abychom mohli určit, zda křivka v okolí bodu leží pod tečnou nebo nad tečnou, musíme v daném bodě spočítat druhou derivaci funkce. Vyjde-li derivace kladná, křivka je v okolí bodu konvexní, a tedy je nad tečnou, vyjde-li záporná, křivka je konkávní, a tedy pod tečnou.

$F$  je funkce  $(n + 1)$  proměnných a hledáme množinu  $M = \{[x; y] : F(x; y) = 0\}$ . Zajímá nás, jak množina vypadá a zda je možné vyjádřit jednu proměnnou jako funkci ostatních proměnných. Postačující podmínku existence implicitní funkce nám říká následující věta:

*Nechť  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá v otevřeném  $(n + 1)$ -rozměrném intervalu  $J$  obsahujícím bod  $[x_0; y_0]$ , kde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Dále předpokládejme, že funkce  $F$  má v intervalu  $J$  spojitou parciální derivaci podle proměnné  $y$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0) \neq 0, F(x_0; y_0) = 0$ . Potom existuje otevřený interval  $J_1 \subseteq J$ , na němž je rovnicí  $F(x; y) = 0$  určena právě jedna funkce  $y = f(x) = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ .*

Věta popisuje situaci, kdy v bodech, kde není tečna ke grafu rovnoběžná s osou  $y$ , můžeme jednu neznámou vyjádřit jako funkci ostatních proměnných.

Další věta mluví o derivaci implicitní funkce:

*Nechť  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  má spojitě parciální derivace až do řádu  $m$  v otevřeném  $(n + 1)$ -rozměrném intervalu  $J$  obsahujícím bod  $[x_0; y_0]$ , kde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Dále předpokládejme, že funkce  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0) \neq 0$  a  $F(x_0; y_0) = 0$ . Potom existuje otevřený interval  $J_1 \subseteq J$ , na němž má funkce  $y = f(x) = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  (jednoznačně určena rovnicí  $F(x, f(x)) = 0$ ) spojitě parciální derivace až do řádu  $m$ .*

Spočítáme tedy derivaci  $\frac{\partial F}{\partial y}$  v bodě  $[1; 1]$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -3x - 3y^2 + e^{x-y}(-1) \rightarrow -3 - 3 - 1 = -7 \neq 0$$

Derivace vyšla nenulová,  $y = f(x)$  v okolí bodu  $[1; 1]$  tedy **existuje**. Nyní spočítáme první derivaci funkce  $y = f(x)$  ze vztahu  $F'(x; f(x)) = 0$  dosazením souřadnic bodu za  $x = 1$  a  $y = f(1) = 1$ .

$$\begin{aligned} F'(x; f(x)) &= 1 + 6x^2 - 3(f(x) + xf'(x)) - 3f^2(x)f'(x) + e^{x-y}(1 - f'(x)) = 0 \\ &\rightarrow 1 + 6 - 3 - 3f'(1) - 3f'(1) + 1 - f'(1) = 0 \\ &-7f'(1) = -5 \\ &f'(1) = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Dále spočítáme druhou derivaci funkce  $y = f(x)$  ze vztahu  $F''(x; f(x)) = 0$  dosazením výše vypočtené první derivace.

$$\begin{aligned}
F''(x; f(x)) &= 12x - 3f'(x) - 3(f'(x) + xf''(x)) - 3(2f(x)(f'(x))^2 + f^2(x)f''(x)) + \\
&\quad + e^{x-y}(1 - f'(x))^2 + e^{x-y}(-f''(x)) = 0 \\
\rightarrow 12 - \frac{15}{7} - \frac{15}{7} - 3f''(1) - \frac{150}{49} - 3f''(1) + \frac{4}{49} - f''(1) &= 0 \\
588 - 210 - 150 + 4 &= 343f''(1) \\
f''(1) &= \frac{232}{343} > 0
\end{aligned}$$

Protože druhá derivace funkce  $f$  vyšla kladná, znamená to, že funkce je konvexní, a tedy leží NAD tečnou.

Rovnici tečny určíme ze vztahu

$$t : (y - y_0) = f'(x)(x - x_0)$$

$$t : y = \frac{5}{7}(x - 1) + 1$$

$$t : y = \frac{5}{7}x + \frac{2}{7}$$