Studentské řešení po revizi vyučujícího.

1 Určete obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n \cdot 2^{(1-n)} \cdot n^{-1}$$

Použijeme limitní podílové kritérium pro absolutní konvergenci:

Věta

Je-li $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ nebo $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní; je-li $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ nebo $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}\cdot 2^{(1-n-1)}\cdot (n+1)^{-1}}{(x-2)^n\cdot 2^{(1-n)}\cdot n^{-1}}\right|$$

Rozepíšeme, zkrátíme a využijeme výsledek z následujícího boxu:

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^n\cdot(x-2)\cdot 2^{-n}\cdot(n+1)^{-1}}{(x-2)^n\cdot 2^{-n}\cdot 2^1\cdot n^{-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)\cdot(n+1)^{-1}}{2\cdot n^{-1}}\right| = \left|\frac{x-2}{2}\right|$$

Limita $\frac{n}{n+1}$

Vytkneme n v čitateli i jmenovateli a následně zkrátíme:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Výraz ve jmenovateli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Tedy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

Aby řada konvergovala, musí být tato limita menší než 1:

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

Řešíme tuto nerovnost:

$$-1 < \frac{x-2}{2} < 1$$
$$-2 < x-2 < 2$$
$$0 < x < 4$$

Řada konverguje absolutně v intervalu $(0,4)$. Nyní musíme zjistit, jestli řada v krajních bodech konverguje nebo diverguje.

Definice harmonické řady

Harmonická řada je řada tvaru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Leibnizovo kritérium

Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1} > 0$. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergentní, právě když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pro součet s této řady platí: $a_1 - a_2 \leq s \leq a_1$.

Pro $x = 0$:

Dosazením $x = 0$ do zadané řady získáme:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(0-2)^n \cdot 2^{(1-n)} \cdot n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot 2 \cdot 2^{-n} \cdot n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot 2 \cdot n^{-1}$$

Řada je tedy alternující. Před využitím Leibnizova kritéria musíme ověřit, zda posloupnost a_n splňuje dvě podmínky:
1. Monotónní klesání:

$$a_n = \frac{2}{n}$$

Posloupnost a_n je klesající, protože $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
2. Konvergence k nule:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

Jelikož obě podmínky platí, dle Leibnizova kritéria je řada konvergentní.

Integrální kritérium

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a funkce f je spojitá, nerostoucí a nezáporná na intervalu $[k, \infty)$. Potom je řada $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ konvergentní, právě když $\lim_{n\to\infty} \int_k^{\infty} f(x)\,dx < \infty$.

Pro $x = 4$**:**

Dosazením $x = 4$ do výrazu pro obor konvergence řady získáme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4-2)^n \cdot 2^{(1-n)} \cdot n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2 \cdot 2^{-n} \cdot n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot n^{-1}$$

Pro určení konvergence této řady použijeme integrální kritérium. Na intervalu $[1, \infty)$ je funkce $f(n) = 2 \cdot n^{-1}$ spojitá, klesající a nezáporná. Nyní spočítáme určitý integrál

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n 2 \cdot x^{-1}\,dx = \lim_{n\to\infty} 2\,[\ln(n)]_1^n = 2 \lim_{n\to\infty} (\ln(n) - \ln(1)) = 2 \lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty$$

Určitý integrál není konečný, proto podle integrálního kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot n^{-1}$ diverguje k nekonečnu.

Interval konvergence řady je tedy $[0, 4)$**.**

2 Spočtěte limitu:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{4x-y+5}{(1+2x+y)^2}$$

Funkci transformujeme z kartézských souřadnic (x, y) do zobecněných polárních souřadnic (r, θ). Poté dosadíme, zjednodušíme výraz a zkusíme dokázat, že limita závisí na úhlu.

Transformace do zobecněných polárních souřadnic (posouváme střed do bodu $[-1, 1]$):

$$x = r\cos(\theta) - 1, \quad y = r\sin(\theta) + 1$$

Proč polární souřadnice?

- Symetrie: Polární souřadnice často lépe zachycují symetrie v problému. To může vést k jednoduššímu vyjádření limity.
- Redukce komplexity: Polární souřadnice mohou snížit složitost výrazu a usnadnit analýzu, zejména pokud je problém symetrický nebo má cylindrickou či sférickou symetrii.
- Přirozenost: V některých problémech, jako je tento, jsou polární souřadnice přirozeným způsobem popisu situace. Například v problémech s kruhovou nebo radiální symetrií.

V tomto konkrétním případě je transformace do polárních souřadnic vhodná kvůli zjednodušení výrazu a snadnější analýze. Po dosazení do limitního výrazu se často stane mnohem přehlednějším a lépe zpracovatelným.

Dosazení do limitního výrazu

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{4r\cos(\theta) - 4 - r\sin(\theta) - 1 + 5}{(1 + 2r\cos(\theta) - 2 + r\sin(\theta) + 1)^2}$$

Zjednodušení výrazu

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{4r\cos(\theta) - r\sin(\theta)}{(2r\cos(\theta) + r\sin(\theta))^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{4\cos(\theta) - \sin(\theta)}{r(2\cos(\theta) + \sin(\theta))^2} = \frac{4\cos(\theta) - \sin(\theta)}{(2\cos(\theta) + \sin(\theta))^2} \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r}$$

Výpočet limity

Protože r se blíží k 0 zprava, jedná se o limitu typu jedna děleno nulou, přičemž výraz je kladný a tedy limita na pravé straně je nekonečno násobené výrazem závisejícím na úhlu. Zkusíme ověřit, že limita závisí na úhlu (konkrétně potřebujeme najít dva úhly tak, aby výraz závisející pouze na úhlu byl pro jeden úhel kladný a pro druhý záporný). Zde konkrétně zvolíme nejprve $\theta = 0$ a pak $\theta = \frac{\pi}{2}$. Pokud budou výsledky limit odlišné, znamená to, že limita funkce po transformaci závisí na úhlu a tím pádem původní limita neexistuje.

Pro $\theta = 0$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{4\cos 0 - \sin 0}{r(2\cos(0) + \sin(0))^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{4\cdot 1 - 0}{r(2+0)^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{4}{r\cdot 4} = +\infty$$

Pro $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{4\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}}{r(2\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}))^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{4\cdot 0 - 1}{r(2\cdot 0+1)^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{-1}{r} = -\infty$$

Z výsledků těchto limit vyplývá, že zadaná limita **neexistuje**.

3 Určete Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě [0,0] pro funkci:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Nejprve spočítáme parciální derivace $f(x, y)$:

První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + 3y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 6xy + 3y^2$$

Druhá derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x + 6y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x + 6y$$

(Proto musíme smíšené derivace násobit dvěma.)
Třetí derivace:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 6$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 6$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6$$

(Proto musíme smíšené derivace násobit třemi.)

Vzorec Taylorova polynomu pro funkce jedné proměnné

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Vzorec Taylorova polynomu třetího stupně pro funkce dvou proměnných

v bodě $[a, b]$

$$P_3(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \boxed{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)$$

(násobení dvojkou)

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)(x-a)^3 + \boxed{3}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)(x-a)^2(y-b) + \boxed{3}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)(x-a)(y-b)^2\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)(y-b)^3$$ (násobení trojkou)

Dosadíme souřadnice bodu $a = 0$, $b = 0$ a hodnoty derivací do vzorce:

$$P_3(x,y) = 0 + (0)x + (0)y$$

$$+\frac{1}{2!}\left((0)x^2 + \boxed{2}(0)xy + (0)y^2\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left((6)x^3 + \boxed{3}(6)x^2y + \boxed{3}(6)xy^2 + (6)y^3\right)$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$P_3(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

4 Ke křivce implicitně určené rovnicí:

$$F(x, y) = x^4 + 2xy + y^4 = 0$$

napište rovnici tečny v bodě [-1,1] a dále určete, zdali tato křivka leží v okolí bodu [-1,1] nad tečnou nebo pod tečnou.

Protože $F(-1, 1) = (-1)^4 + 2(-1)(1) + 1^4 = 1 - 2 + 1 = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 4y^3$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 1) = 2 \neq 0,$$

tak **implicitní funkce** $y = f(x)$ **existuje v okolí bodu** [**-1,1**]. **Nejprve spočítáme první a druhé derivace implicitní funkce** $y = f(x)$:

$$F'(x, f(x)) = 4x^3 + 2(f(x) + xf'(x)) + 4f^3(x)f'(x) = 0,$$
$$F''(x, f(x)) = 12x^2 + 2(f'(x) + f'(x) + xf''(x)) + 12f^2(x)f'(x)f'(x) + 4f^3(x)f''(x) = 0.$$

Následně **z první derivace vyjádříme její hodnotu v bodě** [**-1,1**] tím, že dosadíme za body $x = -1$ a $y = 1$:

$$-4 + 2 - 2f'(-1) + 4f'(-1) = 0,$$
$$f'(-1) = 1.$$

Výsledek potom dosadíme do druhé derivace opět společně s bodem [-1,1] **a dostaneme hodnotu druhé derivace v bodě** [**-1,1**]:

$$12 + 2(2 - f''(-1)) + 12 + 4f''(-1) = 0,$$
$$f''(-1) = -14.$$

Funkce y=f(x) je v okolí bodu [-1,1] konkávní, takže křivka leží v okolí bodu [-1,1] POD tečnou.

Následně vypočítáme rovnici tečny. Použijeme k tomu parciální derivace podle x a podle y. Bod [-1, 1] dosadíme do obou parciálních derivací a následně výsledky dosadíme do vzorce pro určení rovnice tečny.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 2y$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(-1,1) = -2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 4y^3$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(-1,1) = 2$$

Obecná rovnice tečny

$$(y - y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$(y-1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x+1)$$
$$(y-1) = -\frac{(-2)}{2}(x+1)$$
$$(y-1) = x+1$$
$$y = x+2$$

5 Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných $u = 2x + 3y$ a $v = 2x - 3y$ zjednodušte vlnovou rovnici $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{4}{9}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$. Předpokládejte, že funkce f má všechny derivace druhého řádu spojité.

Věta o parciální derivaci složené funkce.

Nechť funkce $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ mají v bodě $x_0 = [x_{01}, \dots, x_{0n}]$ parciální derivace $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)$, $j = 1, \dots, n$. Dále nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $y_0 = [y_{01}, \dots, y_{0n}]$, kde $y_{0i} = g_i(x_0)$. Potom platí:

$$\frac{\partial f(g_1, \dots, g_n)}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_0)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)$$

Ověření jednoznačnosti transformace.

Vyjádříme staré souřadnice pomocí nových:

$$x = \frac{u+v}{4}$$

$$y = \frac{u-v}{6}$$

Aplikujeme výše uvedenou větu a najdeme parciální derivace f podle u a v:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Snadno spočítáme, že:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -3$$

A dosazením do obecného vzorce vyjádříme první derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot (-3)$$

Následně první derivace opět zderivujeme a opět použijeme výše uvedenou větu, ale tentokrát na první derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) - 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

A po dosazení dostaneme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 8\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 18\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 9\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Dosadíme do vlnové rovnice a zjednodušíme:

$$16\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) = 0.$$