

# Cílové dovednosti

Po prostudování této kapitoly bude student schopen:

- **Vysvětlit** účel transformace diferenciálních rovnic a výrazů.
- **Ověřit** vzájemnou jednoznačnost transformace nalezením inverzních vztahů.
- **Aplikovat** pravidla pro derivaci složené funkce jedné a více proměnných.
- **Transformovat** obyčejné i parciální diferenciální rovnice zavedením nových nezávislých či závislých proměnných.
- **Určit** rovnici tečné roviny funkce dvou proměnných v daném bodě.

## 1 Transformace diferenciálních výrazů

### 1.1 Motivace: Proč zavádíme nové proměnné?

Při řešení diferenciálních rovnic často narazíme na modely, které jsou v původních proměnných příliš složité nebo analyticky neřešitelné. Zavedením vhodných nových proměnných můžeme takovou rovnici transformovat na mnohem jednodušší tvar. Typicky se takto dají převést rovnice s proměnnými koeficienty na rovnice s koeficienty konstantními, případně lze složité parciální diferenciální rovnice zjednodušit tak, že se v nich některé derivace vůbec nevyskytují.

### 1.2 Základní pravidlo a nutnost vzájemné jednoznačnosti

Transformace vychází z pravidel pro derivaci složené funkce a parciální derivaci složené funkce. Než ale začneme rovnici transformovat, **musíme vždy ověřit, že je navržená transformace vzájemně jednoznačná (invertibilní)**. Jinými slovy, nesmíme při přechodu k novým proměnným ztratit žádnou informaci. Protože zatím neznáme pokročilejší nástroje, ověříme to jednoduše tak, že **najdeme inverzní transformaci** – z rovnic pro nové proměnné se pokusíme explicitně vyjádřit proměnné staré.

#### Připomenutí klíčových pravidel pro derivování:

Označme si původní (hledanou) funkci malým písmenem  $f$  a novou (transformovanou) funkci velkým písmenem  $F$ . Funkce  $F$  popisuje stejnou závislost jako  $f$ , pouze v nových proměnných.

1. **1D případ:** V rovnici se vyskytuje funkce  $f(x)$  a její derivace. Zavedeme novou proměnnou  $t = t(x)$  a hledáme transformovanou funkci  $F(t)$  takovou, aby platilo:

$$f(x) = F(t(x)).$$

Zderivováním obou stran podle proměnné  $x$  získáme vztah mezi derivacemi:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dt} \frac{dt}{dx}.$$

*Poznámka: Je-li transformace zadána vztahem  $x = x(t)$ , postupujeme stejně jako při substituci v integrálu a spočítáme diferenciál  $dx = x'(t)dt$ , z čehož již snadno vyjádříme hledaný podíl  $\frac{dt}{dx}$ .*

2. **2D případ:** V rovnici se vyskytuje funkce  $f(x, y)$  a její parciální derivace. Zavedeme nové proměnné  $u = u(x, y)$  a  $v = v(x, y)$ . Hledáme transformovanou funkci  $F(u, v)$  takovou, aby po dosazení platilo:

$$f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y)).$$

Zderivováním obou stran podle proměnných  $x$  a  $y$  získáme vztahy mezi derivacemi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

*Poznámka k notaci:* Běžným zvykem v literatuře je používat pro původní i transformovanou funkci stejné písmeno (např.  $f$ ). Pak máme  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ .

### 1.3 Příklad 1: Transformace nezávislé proměnné

**Zadání:** Diferenciální rovnici  $x^2 f''(x) + 4x f'(x) - 2f(x) = 0$  transformujte zavedením nezávisle proměnné  $t$  vztahem  $x = e^t$  ( $x > 0$ ).

**Řešení: 1. Ověření vzájemné jednoznačnosti:** Z rovnice  $x = e^t$  dokážeme pro zadané  $x > 0$  jednoznačně vyjádřit novou proměnnou jako  $t = \ln x$ . Inverze existuje, transformace je vzájemně jednoznačná. Funkce  $e^t$  má navíc derivace všech řádů a ze vztahu  $x = e^t$  získáme diferenciál  $dx = e^t dt$ .

**2. Výpočet derivací:** Pro transformovanou funkci platí  $f(x) = F(t(x)) = F(\ln x)$  a tedy:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dF}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dF}{dt} \frac{1}{e^t} = \frac{dF}{dt} e^{-t}.$$

Pro vyjádření druhé derivace  $f''(x)$  zderivujeme první derivaci opět podle  $x$  a znovu využijeme derivaci složené funkce:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dF}{dt} e^{-t} \right) \frac{dt}{dx} = \left( \frac{d^2 F}{dt^2} e^{-t} - \frac{dF}{dt} e^{-t} \right) \frac{1}{e^t} = \frac{d^2 F}{dt^2} e^{-2t} - \frac{dF}{dt} e^{-2t}.$$

**3. Dosazení do rovnice:** Získané výrazy a původní substituci ( $x = e^t$ ,  $f(x) = F(t)$ ) dosadíme do zadané rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + 4x f'(x) - 2f(x) &= (e^t)^2 \left( \frac{d^2 F}{dt^2} e^{-2t} - \frac{dF}{dt} e^{-2t} \right) + 4e^t \left( \frac{dF}{dt} e^{-t} \right) - 2F(t) \\ &= \left( \frac{d^2 F}{dt^2} - \frac{dF}{dt} \right) + 4 \frac{dF}{dt} - 2F(t) = F''(t) + 3F'(t) - 2F(t) = 0. \end{aligned}$$

### 1.4 Příklad 2: Transformace závislé proměnné

**Zadání:** Diferenciální rovnici  $f'(x)e^x \cos f(x) - x \sin f(x) - \ln x = 0$  transformujte zavedením závisle proměnné  $z(x) = \sin f(x)$ .

**Řešení: 1. Ověření vzájemné jednoznačnosti:** Na vhodně zvoleném intervalu (např. obor hodnot  $R(z) = [-1, 1]$  a  $f(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ ) můžeme explicitně vyjádřit původní funkci jako  $f(x) = \arcsin z(x)$ . Transformace je na tomto oboru invertibilní.

**2. Derivování a dosazení:** Zderivováním substitučního vztahu  $z(x) = \sin f(x)$  podle  $x$  (složená funkce) dostaneme  $z'(x) = f'(x) \cos f(x)$ . Všimněte si, že tento výraz se přímo nachází v zadané rovnici. Po dosazení dostaneme:

$$\underbrace{f'(x) \cos f(x)}_{z'(x)} \cdot e^x - x \underbrace{\sin f(x)}_{z(x)} - \ln x = 0 \quad \implies \quad z'(x)e^x - xz(x) - \ln x = 0.$$

### 1.5 Příklad 3: Transformace partiální diferenciální rovnice

**Zadání:** Pomocí transformace do nezávisle proměnných  $u = x + y$ ,  $v = x - y$  najděme všechny funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se spojitou derivací vyhovující rovnici  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ .

**Řešení: 1. Ověření vzájemné jednoznačnosti:** Zkusíme z rovnic  $u = x + y$  a  $v = x - y$  vyjádřit  $x$  a  $y$ . Jejich sečtením dostaneme  $2x = u + v$ , odečtením  $2y = u - v$ . Tedy  $x = \frac{u+v}{2}$  a  $y = \frac{u-v}{2}$ . Inverze existuje, vztah je vzájemně jednoznačný.

**2. Výpočet derivací:** Hledáme transformovanou funkci  $F(u, v)$  tak, že platí  $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y)) = F(x + y, x - y)$ . Pro partiální derivace původní funkce  $f$  platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot (-1) = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}. \end{aligned}$$

**3. Dosazení do rovnice:** Získané výrazy dosadíme do levé strany zadané rovnice:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \left( \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} \right) = 2 \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Rovnice se zjednodušila na tvar pro novou funkci  $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ . To znamená, že funkce  $F$  nezávisí na proměnné  $u$  a platí  $F(u, v) = g(v)$ , kde  $g$  je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Zpětným dosazením (využitím vztahu  $v = x - y$ ) zjistíme, že všechna řešení původní rovnice mají tvar  $f(x, y) = g(x - y)$ .

### 1.6 Příklad 4: Transformace vlnové rovnice

**Zadání:** Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných  $u = x + ay$ ,  $v = x - ay$  zjednodušíme jednorozměrnou vlnovou rovnici

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad a > 0.$$

**Řešení: 1. Ověření vzájemné jednoznačnosti:** Z rovnic pro  $u$  a  $v$  podobně jako v předchozím příkladu vyjádříme staré proměnné:  $x = \frac{u+v}{2}$  a  $y = \frac{u-v}{2a}$ . Vztah je vzájemně jednoznačný.

**2. První a druhé derivace:** Hledáme transformovanou funkci  $F(u, v)$  takovou, že  $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y)) = F(x + ay, x - ay)$ . Derivace vnitřních funkcí jsou  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$  a  $\frac{\partial u}{\partial y} = a$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = -a$ .

Pro první derivace platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot a + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot (-a) = a \frac{\partial F}{\partial u} - a \frac{\partial F}{\partial v}.\end{aligned}$$

Při výpočtu druhých derivací musíme opět derivovat složené funkce, protože samotné parciální derivace  $\frac{\partial F}{\partial u}$  a  $\frac{\partial F}{\partial v}$  jsou opět složené funkce závislé na  $x$  a  $y$  (zprostředkovaně přes  $u$  a  $v$ ). Za předpokladu záměnnosti smíšených derivací ( $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$ ) dostáváme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right) = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \cdot 1 \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \cdot 1 \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial F}{\partial u} - a \frac{\partial F}{\partial v} \right) = a \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - a \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= a \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot a + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \cdot (-a) \right) - a \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \cdot a + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \cdot (-a) \right) \\ &= a^2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right).\end{aligned}$$

**3. Dosazení do rovnice:** Získané výrazy dosadíme do původní rovnice  $a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ :

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) - a^2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) = 4a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0.$$

Protože  $a > 0$ , rovnice se výrazně zjednodušila na:  $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ .

## 2 Tečná rovina

### 2.1 Motivace: Tečná rovina jako lineární aproximace

Zatímco funkci jedné proměnné  $y = f(x)$  můžeme aproximovat v blízkém okolí daného bodu pomocí tečny (přímky), u funkce dvou proměnných  $z = f(x, y)$  tuto roli přebírá **tečná rovina**. Jedná se o nejlepší možnou **lineární aproximaci** zadané plochy v dostatečně malém okolí zvoleného bodu.

Jestliže má funkce  $f(x, y)$  v okolí bodu  $[x_0, y_0]$  spojité parciální derivace, **tečnou rovinou** ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  nazýváme rovinu danou rovnicí:

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Tato rovina je zkonstruována právě tak, aby se s původní funkcí  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  shodovala nejen ve své funkční hodnotě, ale i v obou parciálních derivacích prvního řádu (tedy ve směrnících tečen v rovinách rovnoběžných s osami  $x$  a  $y$ ).

## 2.2 Příklad 5: Nalezení tečné roviny

**Zadání:** Určete rovnici tečné roviny k funkci  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  v bodě  $A = [1, 1]$ .

**Řešení: 1. Krok: Výpočet funkční hodnoty v bodě  $A$**

$$f(1, 1) = \frac{1}{1} = 1.$$

**2. Krok: Výpočet parciálních derivací a jejich hodnot v bodě  $A$**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{-1}{1^2} = -1.$$

**3. Krok: Dosazení do vzorce pro tečnou rovinu**

$$T(x, y) = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \cdot (x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \cdot (y - 1) = 1 + 1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 1)$$

Po roznásobení a úpravě získáme výslednou rovnici tečné roviny:

$$\mathbf{T(x, y) = x - y + 1.}$$

## 2.3 Tečná rovina k implicitně zadané ploše

Některé plochy nelze (nebo je to příliš složité) explicitně vyjádřit jako funkci  $z = f(x, y)$ . Místo toho jsou dány implicitní rovnicí ve tvaru  $F(x, y, z) = 0$ . Klíčovou vlastností takto zadané plochy je fakt, že vektor sestavený z parciálních derivací funkce  $F$  (gradient) je v každém bodě kolmý na danou plochu. Výpočet tečné roviny je tak velmi přímočarý.

Mějme plochu danou rovnicí  $F(x, y, z) = 0$  a bod  $A = [x_0, y_0, z_0]$ , který na této ploše leží. Pokud má funkce  $F$  v tomto bodě spojité parciální derivace a alespoň jedna z nich je nenulová, pak má **tečná rovina** v bodě  $A$  rovnici:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(A) \cdot (z - z_0) = 0.$$

## 2.4 Příklad: Tečná rovina k implicitně zadané ploše

**Zadání:** Určete rovnici tečné roviny v bodě  $A = [1, 0, 1]$  k ploše určené rovnicí  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$ .

**Řešení:** Plocha je zadána implicitně rovnicí  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$ . K nalezení tečné roviny využijeme přímo parciální derivace funkce  $F$ .

**1. Výpočet parciálních derivací:** Spočítáme parciální derivace podle všech tří proměnných a rovnou do nich dosadíme souřadnice bodu  $A = [1, 0, 1]$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz - 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(1, 0, 1) = 3(1)^2 - 3(0)(1) - 1 = 2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3xz - 1 \quad \implies \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0, 1) = 3(0)^2 - 3(1)(1) - 1 = -4,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy - 1 \quad \implies \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) = 3(1)^2 - 3(1)(0) - 1 = 2.$$

**2. Sestavení rovnice tečné roviny:** Vypočtené hodnoty a souřadnice bodu  $A$  dosadíme do rovnice pro tečnou rovinu k implicitní ploše:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(A) \cdot (z - z_0) = 2(x - 1) - 4(y - 0) + 2(z - 1) = 0.$$

Pro zjednodušení můžeme celou rovnici vydělit dvěma:

$$(x - 1) - 2y + (z - 1) = 0$$

Po úpravě do obecného tvaru dostáváme výslednou rovnici tečné roviny:

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

neboli po vyjádření  $z$  ve tvaru explicitní funkce:

$$T(x, y) = -x + 2y + 2.$$