

# Cílové dovednosti

Po prostudování této kapitoly bude student schopen:

- **Vysvětlit** princip náhrady složité funkce polynomem a faktory ovlivňující přesnost.
- **Sestavit** Taylorův polynom  $n$ -tého stupně pro funkci jedné proměnné.
- **Konstruovat** Taylorův polynom pro libovolný počet proměnných a stupňů.

## 1 Taylorova věta

### 1.1 Motivace: Náhrada funkce polynomem

V praxi se často setkáváme se složitými funkcemi, se kterými je obtížné přímo pracovat. Taylorův rozvoj umožňuje takovou funkci v okolí zvoleného bodu (středu rozvoje  $x_0$ ) aproximovat polynomem. Tento polynom je konstruován tak, aby se v bodě  $x_0$  shodoval s původní funkcí nejen hodnotou, ale i hodnotami jejích derivací – tedy směrnici tečny (1. derivace), zakřivením (2. derivace) a případně i derivacemi vyšších řádů. Výhodou této aproximace je, že s polynomy se pracuje velmi snadno: jejich derivování i integrování je elementární. Složitý problém je tak v okolí bodu  $x_0$  převeden na práci s jednodušším algebraickým výrazem.

### 1.2 Taylorův polynom funkce jedné proměnné

Jestliže funkce  $f$  má v okolí bodu  $x_0$  derivace až do řádu  $n$ , pak je Taylorův polynom  $n$ -tého stupně se středem v bodě  $x_0$  definován vztahem:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Zkráceně pomocí sumy:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

### 1.3 Přesnost aproximace

Taylorův polynom obecně není s funkcí totožný – jde pouze o lokální aproximaci v okolí bodu  $x_0$ . Přesnost této aproximace závisí na několika faktorech:

1. **Vzdálenost od středu:** Čím dále se nacházíme od bodu  $x_0$ , tím větší bývá chyba aproximace.
2. **Stupeň polynomu:** Vyšší stupeň  $n$  znamená, že polynom má s funkcí v bodě  $x_0$  společné derivace až do řádu  $n$ , a proto zpravidla poskytuje přesnější aproximaci.
3. **Charakter funkce:** Pokud se funkce v okolí  $x_0$  hodně mění (tedy má velké hodnoty vyšších derivací), může být aproximace méně přesná.

Pro ilustraci: Taylorův polynom prvního stupně

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

není nic jiného než rovnice tečny ke grafu funkce v bodě  $x_0$ . Vyšší stupně pak tuto lineární aproximaci postupně zpřesňují přidáváním dalších členů.

## 1.4 Příklady

### Příklad: Rozvoj exponenciály

Funkce  $f(x) = e^x$  má derivace všech řádů a platí  $(e^x)^{(k)} = e^x$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ .

Zvolme střed rozvoje  $x_0 = 0$ . Protože  $e^0 = 1$ , jsou všechny derivace v bodě 0 rovny jedné:

$$f^{(k)}(0) = 1 \quad \text{pro všechna } k.$$

Taylorův polynom  $n$ -tého stupně tedy má tvar

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Například:

$$P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

### Příklad: Rozvoj funkce sinus

Funkce  $f(x) = \sin x$  má derivace všech řádů. Zvolme střed rozvoje  $x_0 = 0$ . Platí:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\sin x)'' = -\sin x, \quad (\sin x)''' = -\cos x, \quad (\sin x)^{(4)} = \sin x,$$

další derivace se periodicky opakují. Protože  $\sin 0 = 0$  a  $\cos 0 = 1$ , Taylorův polynom  $n$ -tého stupně obsahuje pouze liché mocniny:

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

Například:

$$P_1(x) = P_2(x) = x, \quad P_3(x) = P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \quad P_5(x) = P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

### Příklad: Rozvoj funkce kosinus

Funkce  $f(x) = \cos x$  má derivace všech řádů. Zvolme střed rozvoje  $x_0 = 0$ . Platí:

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos x)'' = -\cos x, \quad (\cos x)''' = \sin x, \quad (\cos x)^{(4)} = \cos x,$$

další derivace se periodicky opakují. Protože  $\cos 0 = 1$  a  $\sin 0 = 0$ , Taylorův polynom  $n$ -tého stupně obsahuje pouze sudé mocniny:

$$P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Například:

$$P_0(x) = P_1(x) = 1, \quad P_2(x) = P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad P_4(x) = P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

## 1.5 Linearita Taylorova rozvoje

Taylorův rozvoj je lineární operace. To znamená, že rozvoj součtu funkcí je roven součtu jejich rozvoje a obecně platí, že rozvoj lineární kombinace funkcí je roven stejné lineární kombinaci jejich Taylorových polynomů:

$$P_n(af + bg) = aP_n(f) + bP_n(g).$$

Důvod je jednoduchý: derivování je lineární operace, tedy  $(af + bg)^{(k)} = af^{(k)} + bg^{(k)}$ , a Taylorův polynom je sestaven právě z hodnot těchto derivací v daném bodě.

### Příklad: Součet funkcí

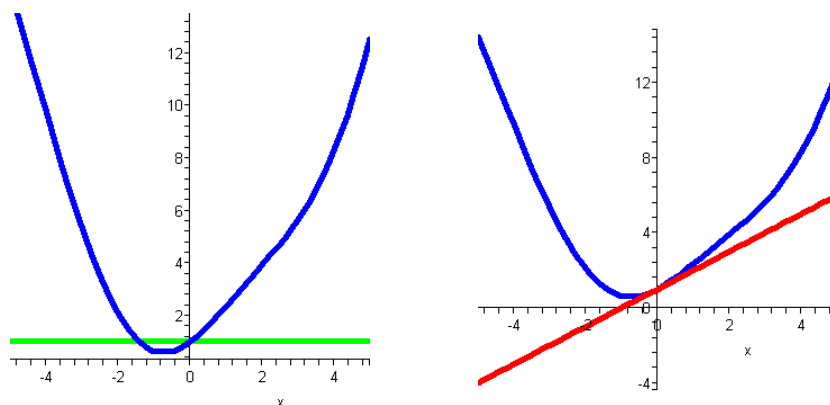
Rozvineme funkci  $f(x) = 1 + \sin x + \frac{x^2}{2}$  v Taylorův polynom stupně  $n$  v bodě 0.

Funkce  $1 + \frac{x^2}{2}$  je již **polynom druhého stupně, takže její Taylorův polynom minimálně druhého stupně je totožný s ní samotnou**, protože všechny derivace třetího a vyššího řádu jsou nulové a do polynomu se tedy nepřidávají žádné další členy.

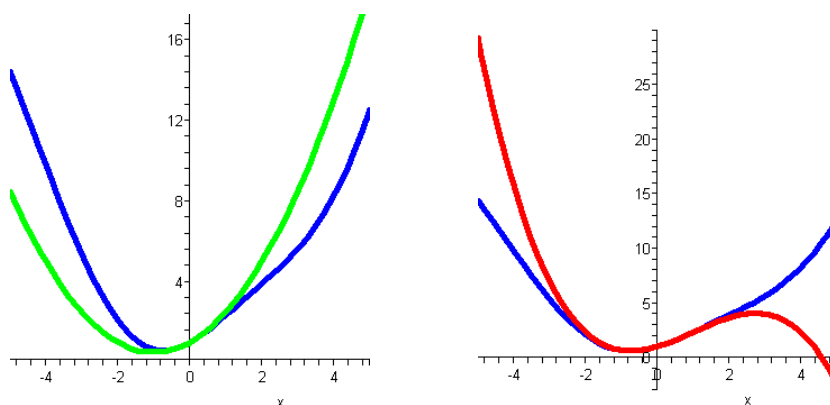
Použijeme dříve vypočtený rozvoj funkce  $\sin x$ :  $P_n^{\sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

Po sečtení obou rozvoje dostáváme rozvoj zadané funkce  $f(x)$ :

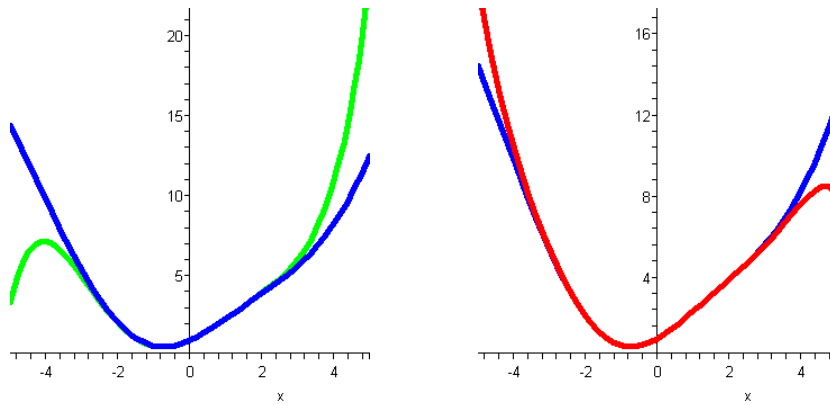
$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$



Obrázek 1:  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = 1 + \frac{x}{1}$ .



Obrázek 2:  $T_2(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!}$ ,  $T_3(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$ .



Obrázek 3:  $T_5(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ ,  $T_7(x) = T_5(x) - \frac{x^7}{7!}$ .

### Příklad: Taylorův polynom v jiném bodě

Rozvineme funkci  $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$  v bodě  $x_0 = 1$ .

Funkce má derivace  $f'(x) = x$  a  $f''(x) = 1$ . Hodnoty v bodě  $x_0 = 1$  jsou:

$$f(1) = \frac{3}{2}, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = 1.$$

Taylorův polynom 2. stupně je

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \frac{3}{2} + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 = 1 + \frac{x^2}{2} = f(x).$$

**Závěr:** Tvar Taylorova polynomu závisí na zvoleném bodě, kolem kterého ho rozvíjíme, ale pokud je funkce polynom a zvolíme polynom dostatečného stupně, výsledný polynom se po úpravě vždy rovná původní funkci.

## 2 Taylorovy řady a konvergence

Zvyšujeme-li stupeň Taylorova polynomu nade všechny meze ( $n \rightarrow \infty$ ), přecházíme od aproximace polynomem k nekonečné řadě. A zajímá nás, zda se tato řada rovná zadané funkci  $f(x)$ .

### Podmínka konvergence

Mějme funkci  $f$ , která má derivace všech řádů v okolí bodu  $x_0$ . Taylorovou řadou funkce  $f$  se středem  $x_0$  nazýváme mocninnou řadu:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Tato řada se rovná funkci  $f(x)$  v bodech, ve kterých zbytek Taylorova polynomu  $R_{n+1}(x) := f(x) - P_n(x)$  konverguje k nule pro  $n \rightarrow \infty$ .

U exponenciály, sinu a kosinu je situace ideální, protože Taylorovy řady se rovnají rozvíjeným funkcím pro všechna reálná čísla:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}.$$

## 2.1 Princip Taylorova polynomu pro funkce více proměnných

Cílem Taylorova polynomu je nahradit složitou funkci v okolí daného bodu, například  $A = [x_0, y_0]$  nebo  $A = [x_0, y_0, z_0]$ , polynomem, který umíme snadno derivovat, integrovat a obecně se s ním lépe počítá. U zadané funkce budeme předpokládat existenci parciálních derivací až do daného řádu.

Polynom sestavujeme podobně jako u funkce jedné proměnné — postupně přidáváme členy vyšších řádů podle derivací v daném bodě. Rozdíl je v tom, že u více proměnných existuje pro každý řád více různých derivací (např. nejen dvakrát podle  $x$  a  $y$ , ale i smíšené jednou podle  $x$  a jednou podle  $y$ ). Proto musíme u každého řádu zahrnout všechny možné kombinace derivování podle jednotlivých proměnných. Základní pravidlo pro sestavení Taylorova polynomu libovolného stupně tedy zní: **Každá parciální derivace je v součtu tolikrát, kolika způsoby může vzniknout.**

Součet všech členů daného  $k$ -tého řádu se pak opět násobí faktorem  $\frac{1}{k!}$ , stejně jako u jedné proměnné.

### 0. řád (konstantní část)

Základem je přesná hodnota funkce v daném bodě:  $f(A)$ .

### 1. řád (lineární část)

Spočítáme všechny první derivace. Každá derivace nastane právě jedním způsobem:

- Pro dvě proměnné:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0)$$

- Pro tři proměnné:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(A)(z - z_0).$$

### 2. řád (kvadratická část)

Procházíme postupně všechny druhé derivace.

- **Derivace dvakrát podle stejné proměnné:** Pořadí derivování se zde nemění, je pouze jedna možnost, např.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x - x_0)^2.$$

- **Smíšené derivace:** Mohou vzniknout dvěma způsoby (např. nejprve podle  $x$  a pak podle  $y$ , nebo naopak). Proto se započítají dvakrát

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x - x_0)(y - y_0).$$

## Shrnutí: Taylorův polynom 2. stupně pro dvě proměnné

$$T_2(x, y) = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y - y_0)^2 \right].$$

## Rozšíření na funkce více proměnných a rozvoje vyšších stupňů

Princip zůstává stejný. Například u funkcí tří proměnných a Taylorově rozvoji 2. stupně dostaneme tři členy obsahující druhé derivace podle jedné proměnné

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

a dále tři smíšené derivace

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z},$$

přičemž každá smíšená derivace může vzniknout dvěma různými pořadími derivování.

U Taylorova rozvoje 3. stupně násobíme součet členů faktorem  $\frac{1}{3!}$  a například derivace  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$  může vzniknout třemi různými pořadími derivování ( $y$  může být na prvním, druhém nebo třetím místě), a proto má koeficient 3, zatímco čistá derivace  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$  vzniká pouze jedním způsobem a má koeficient 1.

Obecně tedy platí, že koeficient každého členu odpovídá počtu různých možností, kterými lze danou kombinaci derivací vytvořit. Taylorův polynom vzniká systematickým sečtením všech těchto kombinací do zvoleného stupně.

## Příklad: Aproximace podílu

Uřídíme Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě  $[1, 1]$  pro funkci  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  a s jeho pomocí odhadneme hodnotu  $\frac{1,01}{0,99}$ .

### 1. Parciální derivace a jejich hodnoty v bodě $A = [1, 1]$ :

0. řád:  $f(A) = 1$

1. řád:  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -1$

2. řád:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = -1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 2$

3. řád:  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0 \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(A) = 0$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{2}{y^3} \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(A) = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\frac{6x}{y^4} \implies \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A) = -6$

### 2. Sestavení Taylorova polynomu $P_3$ :

Dosadíme do vzorce. Pamatujeme na to, že každá derivace je v součtu tolikrát (níže zvýrazněno červeně), kolika způsoby může nastat:

$$\begin{aligned}
 P_3(x, y) &= 1 + \frac{1}{1!} [1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 1)] \\
 &+ \frac{1}{2!} [0 \cdot (x - 1)^2 + \mathbf{2} \cdot (-1) \cdot (x - 1)(y - 1) + 2 \cdot (y - 1)^2] \\
 &+ \frac{1}{3!} [1 \cdot 0 \cdot (x - 1)^3 + \mathbf{3} \cdot 0 \cdot (x - 1)^2(y - 1) + \mathbf{3} \cdot 2 \cdot (x - 1)(y - 1)^2 + 1 \cdot (-6) \cdot (y - 1)^3]
 \end{aligned}$$

Po provedení násobení a zkrácení zlomků s faktoriály dostáváme přehledný tvar:

$$P_3(x, y) = 1 + (x - 1) - (y - 1) - (x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1)^2 - (y - 1)^3$$

### 3. Výpočet aproximace:

Pro vyhodnocení výrazu  $\frac{1,01}{0,99}$  je  $x = 1,01$ ,  $y = 0,99$  a tedy  $(x - 1) = 0,01$  a  $(y - 1) = -0,01$ .

$$\begin{aligned}
 P_3(1,01; 0,99) &= 1 + 0,01 - (-0,01) - (0,01)(-0,01) + (-0,01)^2 + (0,01)(-0,01)^2 - (-0,01)^3 \\
 &= 1 + 0,01 + 0,01 + 0,0001 + 0,0001 + 0,000001 - (-0,000001) \\
 &= 1,020202
 \end{aligned}$$

Pro srovnání: přesná hodnota zlomku je  $1,02020202\dots$ . Vidíme, že již Taylorův polynom 3. stupně nám v tomto blízkém okolí dává výsledek s přesností na 6 desetinných míst.