

Cílová dovednost

Po prostudování této kapitoly student:

- geometricky porozumí pojmům parciální derivace, derivace ve směru a gradient,
- spolehlivě vypočítá parciální derivace prvního i vyšších řádů,
- využije pravidlo o záměnnosti derivací k usnadnění výpočtů,
- umí derivovat složené funkce více proměnných,
- určí gradient a vypočítá derivaci v libovolném zadaném směru.

1 Parciální derivace

Od tečny v rovině k tečnám v prostoru

U funkce jedné proměnné $y = f(x)$ představovala derivace směrnici tečny ke křivce v daném bodě. Jak to ale funguje v prostoru u funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$, jejímž grafem je plocha např. pomyslný kopec?

V takovém bodě na kopci se můžeme vydat nekonečně mnoha směry a každý směr může mít jiný růst nebo pokles (jinou směrnici tečny). Nejprve se podíváme na směrnici tečny ve směrech, které jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami x a y .

- Pokud „zmrazíme“ proměnnou y (představíme si, že jde o pevnou konstantu - případně dosadíme konkrétní konstantu), získáme řez plochou rovnoběžný s osou x . Směrnici tečny k této křivce řezu nazýváme **parciální derivací podle x** .
- Analogicky, pokud zafixujeme x a měníme pouze y , získáme směrnici tečny ve směru osy y , což je **parciální derivace podle y** .
- Stejně postupujeme i pro funkce více proměnných. Standardně tyto derivace značíme takto: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ apod.

Pravidla pro výpočet

Při samotném počítání parciální derivace podle jedné proměnné se ke všem ostatním proměnným **chováme jako ke konstantám**. Platí zde naprosto stejná pravidla pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu jako u funkcí jedné proměnné.

Příklad 1 - výpočet parciálních derivací prvního a druhého řádu

Spočtěme všechny parciální derivace 1. a 2. řádu pro funkci $f(x, y) = 3x^2y + 2x + y^3 - 1 + \sin(xy^2)$.

Derivace 1. řádu: Při derivování podle x považujeme y za konstantu (a derivace konstanty je nula):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 2 + 0 - 0 + y^2 \cos(xy^2) = 6xy + 2 + y^2 \cos(xy^2).$$

Při derivování podle y považujeme x za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 0 + 3y^2 - 0 + \cos(xy^2) \cdot (2xy) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy \cos(xy^2).$$

Derivace 2. řádu: Získané funkce můžeme dále derivovat, čímž získáme derivace 2. řádu. Kombinace jsou celkem 4 (2^2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (6xy + 2 + y^2 \cos(xy^2)) = 6y - y^4 \sin(xy^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 3y^2 + 2xy \cos(xy^2)) = 6y + 2x \cos(xy^2) - 4x^2 y^2 \sin(xy^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 3y^2 + 2xy \cos(xy^2)) = 6x + 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (6xy + 2 + y^2 \cos(xy^2)) = 6x + 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2).\end{aligned}$$

2 Záměnnost parciálních derivací

V předchozím příkladu jste si mohli všimnout, že smíšené derivace vyšly naprosto stejně: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Nejde o náhodu.

Pravidlo o záměnnosti: Pokud má funkce v daném bodě spojitě smíšené parciální derivace, nezáleží na pořadí, v jakém derivujeme. Toto pravidlo platí i pro derivace vyšších řádů a usnadňuje výpočty.

Příklad 2 (Záměnnost a úspora práce)

Vypočtěme všechny parciální derivace 3. řádu funkce $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$, $y \neq 0$.

Nejprve spočteme derivace prvního a druhého řádu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{y^2}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-2x}{y^3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{6x}{y^4}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2}{y^3}.\end{aligned}$$

Místo výpočtu všech 8 možných variant parciálních derivací třetího řádu ($2^3 = 8$) nám díky záměnnosti stačí spočítat pouze čtyři unikátní kombinace:

- **Třikrát podle x :** $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$.
- **Třikrát podle y :** $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{-24x}{y^5}$.
- **Dvakrát x , jednou y :** Z předchozího víme, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$. Derivací nuly je nula. Takže bez ohledu na pořadí: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 0$.
- **Jednou x , dvakrát y :** Derivujeme-li $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$ podle x , dostaneme $\frac{6}{y^4}$. Takže opět platí pro všechny kombinace: $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{6}{y^4}$.

3 Derivace složené funkce

Představme si, že máme funkci $f(u, v)$, ale samotné proměnné u a v nejsou nezávislé – mění se v závislosti na proměnných x a y , tedy $u(x, y)$ a $v(x, y)$. Chceme zjistit, jak se chová celá funkce f v závislosti na x a y .

Derivace složené funkce pro funkce více proměnných za předpokladu, že obě vnitřní funkce i vnější funkce mají spojitě parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Všimněte si, že musíme projít přes **všechny** proměnné u i v , které na x , respektive y závisí, a jejich příspěvky sečíst. Pro funkce tří proměnných bychom do vzorce přičetli třetí součin.

Příklad 3 - dvě cesty k výsledku parciální derivace složené funkce

Spočtěme parciální derivace funkce $f(u, v) = u^2 + uv + 1$ podle x a y , jestliže $u(x, y) = e^{x+y}$ a $v(x, y) = \frac{y}{x}$.

Cesta 1: Pomocí vzorce

Nejprve spočítáme všechny dílčí derivace (vnější funkce podle u a v a vnitřních funkcí podle x a y):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= 2u + v, & \frac{\partial f}{\partial v} &= u, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= e^{x+y}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= e^{x+y}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Poté vše dosadíme do vzorců a následně nahradíme u a v výrazy s x a y :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (2u + v) \cdot e^{x+y} + u \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \left(2e^{x+y} + \frac{y}{x}\right) e^{x+y} - e^{x+y} \frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (2u + v) \cdot e^{x+y} + u \cdot \frac{1}{x} = \left(2e^{x+y} + \frac{y}{x}\right) e^{x+y} + e^{x+y} \frac{1}{x}.$$

Cesta 2: Přímé dosazení a následná derivace

Pokud jsou předpisy funkcí známé, můžeme vnitřní funkce rovnou dosadit do vnější a derivovat až výsledný výraz:

$$f(x, y) = \left(e^{x+y}\right)^2 + e^{x+y} \frac{y}{x} + 1.$$

Následně počítáme derivaci standardně jako u jedné funkce:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(e^{x+y}) \cdot e^{x+y} + \left(e^{x+y} \frac{y}{x} + e^{x+y} \left(\frac{-y}{x^2}\right)\right).$$

Zcela analogicky postupujeme při derivování podle y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(e^{x+y}) \cdot e^{x+y} + \left(e^{x+y} \frac{y}{x} + e^{x+y} \frac{1}{x}\right).$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že výsledky jsou totožné.

4 Derivace ve směru a gradient

Jak jsme si řekli v úvodu, parciální derivace zkoumají pouze směrnice tečny ve směru některé osy. Často ale potřebujeme vědět, jak strmý je svah, když se z daného bodu vydáme jakýmkoliv jiným směrem určeným vektorem. Zcela klíčovým pojmem je **gradient**. Jde o vektor složený ze všech parciálních derivací funkce v daném bodě. Značí se $\text{grad } f$ nebo symbolem nabla: $\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$. *Geometrický význam gradientu:* Gradient ukazuje směr **největšího lokálního růstu** funkce. Jeho velikost pak udává míru tohoto růstu.

Výpočet derivace ve směru

Za předpokladu, že má funkce v daném bodě spojité parciální derivace, odpovídá derivace ve směru **skalárnímu součin gradientu a směrového vektoru**. Platí důležité pravidlo: **směrový vektor musí mít euklidovskou normu rovnu 1**. Pokud máme obecný vektor $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, je potřeba jej nejprve převést na jednotkový vektor (znormalizovat). To provedeme tak, že jej vydělíme jeho velikostí: $u = \frac{v}{\|v\|_2} = \frac{v}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}}$.

Vzorec pro derivaci ve směru u je pak:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Geometricky představuje derivace ve směru směrnici tečny ke křivce, která vznikne řezem grafu funkce svislou rovinou vedenou v tomto zadaném směru. Výsledek nám udává, jak strmě budeme po ploše růst nebo klesat, pokud se z daného bodu vydáme ve směru zvoleného vektoru.

Příklad 4 (Výpočet derivace ve směru)

Vypočtete derivaci funkce $f(x, y) = \arctg(x^2 + y^2)$ v bodě $A = [1, 1]$ ve směru vektoru $v = [1, 2]$.

1. Výpočet gradientu v bodě A: Nejprve spočítáme parciální derivace v bodě $[1, 1]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot 2x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{2}{1 + 2^2} = \frac{2}{5},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot 2y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{2}{5}.$$

Gradient v bodě A je tedy $\nabla f(1, 1) = \left[\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right]$.

2. Normalizace směrového vektoru: Délka vektoru v je $\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Spočítáme vektor s jednotkovou euklidovskou normou: $u = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right]$.

3. Skalární součin (dosazení do vzorce):

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{25}.$$

Závěr: Derivace v zadaném směru má hodnotu $\frac{6\sqrt{5}}{25}$.

5 Časté chyby a varování

- **Zapomenutí normalizace směrového vektoru:** Směrový vektor ve vzorci se skalárním součinem **musí** mít euklidovskou normu 1. Pokud do vzorce dosadíme původní vektor $v = [1, 2]$, vyjde nám nesprávný výsledek.
- **Derivace součinu (přehlížení proměnné):** Máte-li např. derivovat $x^2 \sin(xy)$ podle x , studenti často derivují jen jednu část. Protože se proměnná x nachází v obou členech, je nutné striktně použít pravidlo pro derivaci součinu: $(uv)' = u'v + uv'$.
- **Zapomenutá derivace vnitřní funkce:** Při derivování složených funkcí (např. u naší funkce $\arctg(x^2 + y^2)$ nebo e^{x+y}) se často zderivuje pouze vnější funkce, ale zapomene se výsledek násobit derivací vnitřní funkce. Vždy je nutné důsledně aplikovat pravidlo pro derivaci složené funkce.