Cílová dovednost

Po prostudování této kapitoly je student schopen:

- **Rozhodnout** o konvergenci či divergenci číselné řady pomocí vhodného kritéria (včetně ověření předpokladů).
- **Aplikovat** kritéria konvergence na příslušné typy řad.
- **Určit** obor konvergence funkční řady včetně podrobného vyšetření krajních bodů.

---

1 Nekonečné číselné řady

Základní pojmy

Nekonečnou číselnou řadou rozumíme symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$. Zajímá nás, zda se součet těchto čísel blíží k nějaké konečné hodnotě (řada **konverguje**), nebo zda roste nade všechny meze či osciluje (řada **diverguje**).

Geometrická řada Řada tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$.

- Konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$.
- Součet je dán vzorcem $s = \dfrac{aq}{1-q}$.

Kritéria konvergence

Pro rozhodování o konvergenci existuje několik kritérií. Před jejich použitím je vždy nutné ověřit příslušné předpoklady.

1. Nutná podmínka konvergence (NPK): Nejjednodušší test konvergence řady.

$$\text{Pokud } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \text{ pak řada DIVERGUJE.}$$

Poznámka: Pokud je limita rovna nule, o konvergenci to nic nevypovídá a je nutné použít další kritéria.

2. Kritéria pro řady s nezápornými členy ($a_n \geq 0$)

- **Limitní podílové kritérium:** Vypočítá se limita $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
  - $L < 1 \implies$ řada konverguje.
  - $L > 1 \implies$ řada diverguje.
  - $L = 1 \implies$ kritérium nerozhodne.

  Vhodné pro řady obsahující faktoriály.

- **Limitní odmocninové kritérium:** Vypočítá se limita $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Závěry jsou stejné jako u limitního podílového kritéria ($L < 1$ konverguje, $L > 1$ diverguje, $L = 1$ nerozhodne). *Vhodné pro řady typu* $(\dots)^n$.
- **Integrální kritérium:** Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu $[1, \infty)$, která je na tomto intervalu: **nezáporná**, **nerostoucí**, **spojitá** a platí $f(n) = a_n$. Potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když je integrál $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konečný.

3. Leibnizovo kritérium pro alternující řady: Pro řady se střídajícími se znaménky (typu $(-1)^n a_n$) využíváme jednoduché Leibnizovo kritérium: Jestliže posloupnost a_n je nerostoucí (pro všechna n: $a_{n+1} \le a_n$), potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4- Absolutní konvergence: Říkáme, že řada **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Platí, že jestliže konverguje řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, potom konverguje i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Při vyšetřování absolutní konvergence pracujeme s řadou s nezápornými členy, a můžeme tedy použít všechna výše uvedená kritéria pro řady s nezápornými členy.

Obecný postup vyšetřování

1. **Ověření nutné podmínky:** Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$. Pokud nevyjde nula, řada diverguje.
2. **Volba dalšího kritéria:**
   - Obsahuje člen $n!$? $\to$ Limitní podílové kritérium.
   - Obsahuje člen $(\dots)^n$? $\to$ Limitní podílové nebo odmocninové kritérium.
   - Lze člen a_n snadno integrovat? $\to$ Integrální kritérium (nezapomeňte ověřit předpoklady).
3. **Alternující řady:** Ověřte podmínky Leibnizova kritéria.

Řešené příklady (Číselné řady)

Příklad 1: Aplikace integrálního kritéria

Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

- Uvažujme funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Na intervalu $[1, \infty)$ je tato funkce kladná, spojitá a klesající (její derivace $-1/x^2$ je záporná). Předpoklady jsou splněny.
- Vypočteme integrál:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\ln|x|\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty - 0 = \infty$$

- Integrál není konečný, proto řada **diverguje**.

Příklad 2: Alternující řada a Leibnizovo kritérium

Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

- Absolutní hodnota členů vede na řadu $\sum \frac{1}{n}$, která diverguje (viz Příklad 1). Řada nekonverguje absolutně.
- Aplikace Leibnizova kritéria: 1. Je posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$ klesající? Ano, protože $n < n+1 \implies \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. 2. Je limita nulová? $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Obě podmínky jsou splněny, řada **konverguje** (neabsolutně).

---

2 Funkční řady

Zadání a cíl

Dána je řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (případně $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$). Cílem je nalézt množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která tato řada konverguje.

Postup řešení

1. **Hrubé určení intervalu:** Aplikujeme limitní podílové kritérium pro absolutní konvergenci.
$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right|$$
Řada konverguje tam, kde $L(x) < 1$. Z této nerovnice určíme otevřený interval pro x.
2. **Vyšetření krajních bodů:** V krajních bodech intervalu vychází $L(x) = 1$, kritérium tedy nerozhodne. Tyto konkrétní hodnoty x je nutné dosadit do původního zadání. Tím vzniknou **číselné řady**, o jejichž konvergenci rozhodneme pomocí kritérií z první části kapitoly (Integrální, Leibnizovo nebo NPK).
3. **Závěr:** Výsledný obor konvergence zapíšeme jako interval (pozor na typ závorek u krajních bodů).

Řešené příklady

Příklad A: Konvergence v obou krajních bodech

Určete obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

- **Kritérium:**
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = |x| \cdot 1$$

Podmínka konvergence: $|x| < 1 \implies x \in (-1, 1)$.

- **Levý kraj ($x = -1$):** Dosadíme do zadání: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Řada konverguje absolutně, protože řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje podle integrálního kritéria, viz níže.
- **Pravý kraj ($x = 1$):** Dosadíme do zadání: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Použijeme integrální kritérium pro $f(x) = x^{-2}$.

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^b = 0 - (-1) = 1$$

  Integrál je konečný, řada **konverguje**.

Výsledek: $x \in [-1, 1]$.

Příklad B: Konvergence pouze v jednom krajním bodě

Určete obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

- **Kritérium:**

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

  Podmínka konvergence: $|x| < 1 \implies x \in (-1, 1)$.

- **Levý kraj ($x = -1$):** Dosadíme: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Jde o alternující řadu (viz Příklad 2 výše). Podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny. **Řada konverguje**.
- **Pravý kraj ($x = 1$):** Dosadíme: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Harmonická řada (viz Příklad 1 výše). Podmínky integrálního kritéria jsou splněny. **Řada diverguje**.

Výsledek: $x \in [-1, 1)$.

Příklad C: Divergence v obou krajních bodech

Určete obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

- **Kritérium:** Aplikujeme limitní podílové kritérium na celý člen a_n:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \left|\frac{x-1}{2}\right| \right) = \left|\frac{x-1}{2}\right|$$

- **Podmínka konvergence:**

$$\frac{|x-1|}{2} < 1 \implies |x-1| < 2$$

  Tato nerovnost vyjadřuje, že vzdálenost čísla x od bodu 1 musí být menší než 2.

$$-2 < x - 1 < 2 \implies -1 < x < 3.$$

- **Levý kraj ($x = -1$):** Dosadíme do závorky: $\frac{-1-1}{2} = -1$. Řada má tvar: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n$.

  Ověříme Nutnou podmínku konvergence ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). Vyšetříme chování posloupnosti $n(-1)^n$ pro sudé a liché členy zvlášť:

  a) Pro sudé n ($n = 2k$): $\lim_{k\to\infty} 2k \cdot (-1)^{2k} = \infty$.

  b) Pro liché n ($n = 2k + 1$): $\lim_{k\to\infty}(2k + 1) \cdot (-1)^{2k+1} = -\infty$.

  Protože limity vybraných podposloupností jsou různé ($\infty \neq -\infty$), celková limita neexistuje. Nutná podmínka není splněna, řada **diverguje**.

- **Pravý kraj ($x = 3$):** Dosadíme do závorky: $\frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Řada má tvar: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$. Ověříme nutnou podmínku konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0.$$

  Řada **diverguje**.

Výsledek: $x \in (-1, 3)$.