

Cílová dovednost

Po prostudování této kapitoly student:

- určí a graficky popíše definiční obor funkce dvou proměnných,
- rozhodne o existenci či neexistenci limity funkce v bodě,
- vypočítá limitu pomocí úprav výrazu,
- porozumí geometrickému významu chování funkce v okolí bodu.

1 Definiční obor funkcí dvou proměnných

Význam a postup

Určování definičního oboru $D(f)$ se řídí stejnými pravidly jako u funkcí jedné proměnné. Rozdíl je v tom, že řešení výsledných podmínek je složitější – výsledkem je **oblast v rovině**.

Při zakreslování je nutné rozlišit, zda **příslušná část hranice** do definičního oboru patří ($\leq, \geq, =$) nebo nepatří ($<, >, \neq$). Jestliže celá hranice je součástí množiny, pak říkáme, že **množina je uzavřená** a jestliže žádná část hranice není součástí množiny, pak říkáme, že **množina je otevřená**. Množiny, které obsahují jen část své hranice, nejsou ani otevřené, ani uzavřené.

Příklad: součin pod odmocninou

Určete a zakreslete definiční obor funkce:

$$f(x, y) = \sqrt{(-x^2 - y^2 + 6x)(x^2 + y^2 - 6y)}.$$

Komentář k řešení: Výraz pod odmocninou musí být nezáporný. Hranici definičního oboru tvoří body, kde se výraz rovná nule:

$$(-x^2 - y^2 + 6x)(x^2 + y^2 - 6y) = 0.$$

Tato rovnice je splněna, pokud je alespoň jedna závorka rovna nule. Úpravou (doplněním na čtverce) získáme rovnice dvou hraničních kružnic:

1. Rovnice první hranice:

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - y^2 &= 0 \\ x^2 - 6x + y^2 &= 0 \\ (x - 3)^2 - 9 + y^2 &= 0 \implies (\mathbf{x - 3})^2 + \mathbf{y^2} = \mathbf{9} \end{aligned}$$

Jde o kružnici se středem v bodě $[3, 0]$ a poloměrem $r = 3$.

2. Rovnice druhé hranice:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6y &= 0 \\ x^2 + (y - 3)^2 - 9 &= 0 \implies \mathbf{x^2} + (\mathbf{y - 3})^2 = \mathbf{9} \end{aligned}$$

Jde o kružnici se středem v bodě $[0, 3]$ a poloměrem $r = 3$.

Systematická analýza součinu

Označme si

$$A(x, y) = -x^2 - y^2 + 6x, \quad B(x, y) = x^2 + y^2 - 6y.$$

Definiční obor je dán podmínkou

$$A(x, y) \cdot B(x, y) \geq 0.$$

Součin dvou výrazů je nezáporný právě tehdy, když:

- oba výrazy jsou kladné,
- nebo oba výrazy jsou záporné,
- případně alespoň jeden z nich je roven nule.

Znaménka v jednotlivých oblastech určíme například dosazením středů kružnic:

- $A(x, y) > 0$ uvnitř kružnice $(x - 3)^2 + y^2 = 9$,
- $A(x, y) < 0$ vně této kružnice,
- $B(x, y) > 0$ vně kružnice $x^2 + (y - 3)^2 = 9$,
- $B(x, y) < 0$ uvnitř této kružnice.

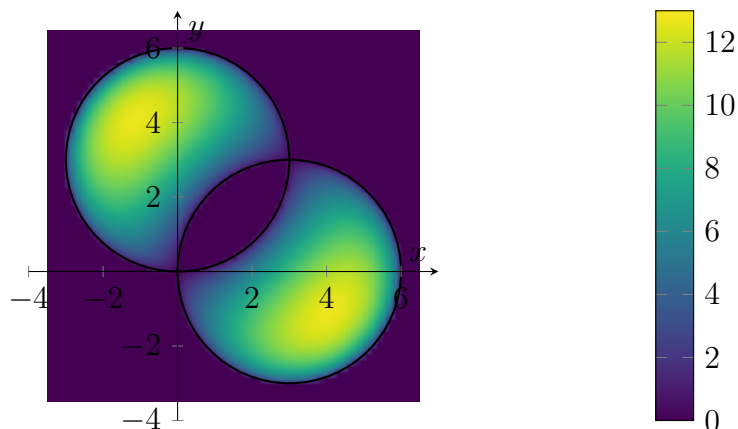
Definiční obor tedy tvoří dvě části:

1. body, které leží uvnitř první kružnice a zároveň vně druhé,
2. body, které leží uvnitř druhé kružnice a zároveň vně první.

Průnik obou kružnic do definičního oboru **nepatří**, protože tam má jeden z výrazů kladné a druhý záporné znaménko, takže jejich součin je záporný. Hraniční kružnice (kde $A = 0$ nebo $B = 0$) do definičního oboru patří, protože odmocnina z nuly je definována.

Vizualizace $D(f)$ a reliéfu funkce

Matematicky přesná mapa $f(x, y)$ s korektním maximem



Jednotlivé barevné odstíny v grafu představují vrstevnice, což jsou množiny bodů se stejnou funkční hodnotou definované rovnicí $f(x, y) = c$.

2 Limity funkcí dvou proměnných

1. **1D vs. 2D prostor:** V analýze funkce jedné proměnné se k bodu x_0 můžeme blížit pouze ze dvou stran (zleva a zprava). Ve 2D prostoru se k bodu $[x_0, y_0]$ můžeme blížit po nekonečném množství cest — nejen zleva a zprava, ale i zdola a shora a také po přímkách, po parabolách či jiných křivkách.
2. **Podmínka existence:** Aby limita existovala, musí být výsledná hodnota L nezávislá na zvolené cestě; musí být tedy stejná pro libovolnou z nekonečného počtu trajektorií vedoucích do daného bodu. Pokud najdeme alespoň dvě cesty, po kterých funkce dospěje k různým limitním hodnotám, limita v daném bodě neexistuje.
3. **Absence L'Hospitalova pravidla:** Pro funkce více proměnných neexistuje přímá analogie L'Hospitalova pravidla. Jelikož máme více nezávislých proměnných a partiálních derivací, nelze jednoduše derivovat čitatel a jmenovatel, protože derivace v jednom směru (např. podle x) nepostihuje chování funkce v ostatních směrech.
4. **Geometricky:** Když se v našem grafu blížíme k bodu $[x_0, y_0]$ ze všech možných stran, skončíme vždy ve stejné nadmořské výšce (barvě)?

Praktický postup při výpočtu limity

Při řešení limity funkce dvou proměnných v limitním bodě $[x_0, y_0]$ doporučujeme postupovat v následujícím pořadí. První čtyři metody slouží k přímému výpočtu, ostatní spíše k důkazu, že limita neexistuje. Poslední čtyři metody redukují limitu ve dvou proměnných na limitu v jedné proměnné. Tyto metody testují pouze vybrané trajektorie vedoucí do daného bodu. Pokud výsledek závisí na parametru (např. směrnici přímky nebo konstantě k), limita **neexistuje**. Pokud výsledek na parametru nezávisí a vyjde číslo L , pak platí: **buď limita neexistuje, nebo je rovna číslu L** . Takový výpočet tedy nepředstavuje důkaz existence limity, ale **významně zúží možnosti** a určí jediného kandidáta na její hodnotu. K potvrzení existence nebo neexistence je nutné použít jinou metodu.

1. **Přímé dosazení** Pokud po dosazení souřadnic x_0, y_0 nevznikne nedefinovaný výraz (např. dělení nulou), máme hotovo. Výsledkem je funkční hodnota.
2. **Algebraické úpravy** Pokud vyjde nedefinovaný výraz, zkusíme výraz zjednodušit:
 - **Rozklad na součin:** Vytknutí, použití vzorců $(a \pm b)^2, a^3 \pm b^3$ atd., následné krácení.
 - **Usměrnění zlomku:** Rozšíření výrazem, který odstraní odmocninu (např. podle vzorce $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$).
3. **Nenulové číslo lomeno nulou:** Podobně jako u funkcí jedné proměnné, v této situaci se podíváme, jestli je funkce v okolí limitního bodu $[x_0, y_0]$ kladná (limita je nekonečno), záporná (limita je minus nekonečno) nebo střídá znaménka (limita neexistuje).
4. **Metoda dolního a horního odhadu:** Pokud dokážeme funkci $f(x, y)$ odhadnout zdola a shora tak, že:

$$h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y)$$

a obě krajní funkce mají stejnou limitu L , pak má stejnou limitu i funkce f .

5. **Postupné limity (blížíme se zdola, shora, zleva a zprava):** Spočteme dvě limity:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right), \quad L_2 = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right).$$

Pokud $L_1 \neq L_2$, limita **neexistuje**. Pokud $L_1 = L_2$, víme pouze, že **buď limita neexistuje nebo se rovná vypočtené limitě**.

6. **Přibližování po obecné přímce:** Testujeme přiblížení po všech přímkách procházejících bodem $[x_0, y_0]$. Dosadíme za y :

$$y = y_0 + k(x - x_0), \quad \text{kde } k \in \mathbb{R}.$$

Vznikne limita jedné proměnné ($x \rightarrow x_0$). Pokud výsledek závisí na směrnici k , limita **neexistuje**.

7. **Přibližování po obecné parabole:** Zkusíme dosadit parabolu procházející bodem $[x_0, y_0]$:

$$y = y_0 + k(x - x_0)^2.$$

Pokud výsledek závisí na parametru k , limita **neexistuje**.

8. **Transformace do polárních souřadnic:**

$$x = x_0 + r \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \sin \varphi.$$

Limitu pak počítáme pro poloměr $r \rightarrow 0^+$. Pokud výsledek závisí na úhlu φ , limita **neexistuje**.

3 Řešené příklady

V této části aplikujeme postupy z předchozí „kuchařky“ na konkrétní úlohy.

Příklad 1 (Přímé dosazení)

Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$.

Po dosazení bodu $[0, 0]$ nevzniká žádný nedefinovaný výraz (jmenovatel je roven 1).

$$\frac{0+0}{0^2+0^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Závěr: Limita je rovna 0.

Příklad 2 (Algebraické úpravy)

Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.

Po dosazení dostáváme nedefinovaný výraz $\frac{0}{0}$. Rozložíme čitatele i jmenovatele podle vzorců $a^3 + b^3$ a $a^2 - b^2$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}.$$

Vykrátíme problémový člen $(x + y)$ a znovu dosadíme:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = \frac{(-1)^2 - (-1) \cdot 1 + 1^2}{-1 - 1} = \frac{1 + 1 + 1}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Závěr: Limita je rovna $-\frac{3}{2}$.

Příklad 3 (Metoda horního a dolního odhadu)

Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{\sin(x + y)}{x}$.

Funkce $\sin(x + y)$ je omezená (nabývá hodnot pouze z intervalu $[-1, 1]$). Funkce $\frac{1}{x}$ jde pro $x \rightarrow \infty$ k nule. Platí odhad:

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin(x + y)}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$$

Protože levá i pravá strana konvergují k 0, musí k nule konvergovat i sevřená funkce.

Závěr: Limita je rovna 0.

Příklad 4 (Nenulové číslo děleno nulou)

Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - 1}{x^2 + y^2}$.

Po dosazení dostáváme limitu typu $\frac{-1}{0}$. Aby limita existovala (a byla rovna $\pm\infty$), musí mít jmenovatel v okolí bodu stále stejné znaménko. Výraz $x^2 + y^2$ je vždy nezáporný. Tedy dělíme záporné číslo (-1) velmi malým kladným číslem.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - 1}{x^2 + y^2} \stackrel{[\frac{-1}{0^+}]}{=} -\infty.$$

Závěr: Limita je rovna $-\infty$.

Příklad 5 (Nenulové číslo děleno nulou)

Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{(x + y)^3}$.

Opět typ $\frac{1}{0}$. Zde však jmenovatel $(x + y)^3$ mění znaménko podle toho, z jaké strany se k limitnímu bodu blížíme. Prozkoumejme chování na přímce $y = x$:

- Pro $x \rightarrow 0^+$ (zprava): $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2x)^3} \stackrel{[\frac{1}{0^+}]}{=} \infty$.
- Pro $x \rightarrow 0^-$ (zleva): $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(2x)^3} \stackrel{[\frac{1}{0^-}]}{=} -\infty$.

Závěr: Limita neexistuje.

Příklad 6 (Postupné limity)

Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Spočteme limity postupným přibližováním po osách:

$$1. \text{ První } y \rightarrow 0, \text{ potom } x \rightarrow 0 : \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$$2. \text{ První } x \rightarrow 0, \text{ potom } y \rightarrow 0 : \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Protože $1 \neq -1$, výsledky se neshodují.

Závěr: Limita neexistuje.

Příklad 7 (Obecná přímka v obecném bodě)

Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{2x + 2y}{x - y - 2}$.

Po dosazení dostáváme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Zkusíme se k bodu $[1, -1]$ přiblížit po všech možných přímkách, které jím procházejí. Obecná rovnice přímky procházející bodem $[x_0, y_0]$ je $y - y_0 = k(x - x_0)$. V našem případě:

$$y - (-1) = k(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = k(x - 1) - 1.$$

Dosadíme tento výraz za y do limity. Tím převedeme úlohu na limitu jedné proměnné:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 2(k(x - 1) - 1)}{x - (k(x - 1) - 1) - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 2kx - 2k - 2}{x - kx + k + 1 - 2}.$$

V čitateli i jmenovateli vytkneme $(x - 1)$ (případně použijeme l'Hospitalovo pravidlo – zde můžeme, protože už počítáme limitu jedné proměnné):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1) + 2k(x - 1)}{(x - 1) - k(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2 + 2k)}{(x - 1)(1 - k)} = \frac{2 + 2k}{1 - k}.$$

Výsledek závisí na parametru k (směrnici přímky).

Závěr: Limita neexistuje.

Příklad 8 (Polární souřadnice)

Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Zavedeme polární souřadnice $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Dosadíme a upravíme:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2(r \cos \varphi)(r \sin \varphi)}{r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \sin(2\varphi)}{r^2} = \sin(2\varphi).$$

Výsledek závisí na úhlu φ . Pro různé úhly přiblížení dostáváme různé hodnoty.

Závěr: Limita neexistuje.

Příklad 9 (Po obecné parabole)

Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Zkusme polární souřadnice. Po dosazení a vytknutí r^2 ve jmenovateli:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2(r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi}.$$

Rozlišíme dva případy pro pevný úhel φ :

- Pokud $\sin \varphi = 0$ (přibližování po ose x , potom $\cos \varphi \neq 0$), po dosazení $\sin \varphi = 0$ vyjde $\frac{0}{r^2 \cos^4 \varphi + 0} = 0$.
- Pokud $\sin \varphi \neq 0$ (ostatní směry), po dosazení $r = 0$ vyjde $\frac{0}{0 + \sin^2 \varphi} = 0$.

Limita pro všechny úhly je tedy rovna 0. Z toho plyne závěr, že celková limita **buď neexistuje, nebo je rovna nule**. K rozhodnutí musíme použít alternativní postup.

Zkusme se přiblížit po obecné parabole $y = kx^2$ procházející limitním bodem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot (kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Výsledek závisí na konstantě k (tvaru paraboly).

Závěr: Limita neexistuje.

4 Časté chyby při počítání limit a varování

- **Falešný pocit bezpečí:** To, že vyjde stejné číslo po dosazení:
 - postupných limit ($\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$ a $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$),
 - všech přímk ($y = k(x - x_0) + y_0$),
 - všech parabol ($y = k(x - x_0)^2 + y_0$),
 - i polárních souřadnic ($x = x_0 + r \cos \varphi$, $y = y_0 + r \sin \varphi$),

stále **nestačí** k důkazu, že limita existuje! *Pamatujte:* Tyto čtyři metody slouží primárně k **důkazu neexistence** (pokud vyjdou dvě cesty různě). K důkazu existence musíte použít jiné metody.

- **Nenula děleno nulou $\neq \infty$ automaticky:** Pokud po dosazení vyjde limita typu $\frac{k}{0}$, musíte zkoumat znaménko jmenovatele v celém okolí bodu.
 - Jmenovatel nemění znaménko $\Rightarrow \infty$ nebo $-\infty$.
 - Jmenovatel mění znaménko \Rightarrow limita neexistuje (najdeme dvě cesty s různou limitou).
- **Zákaz L'Hospitalova pravidla pro funkce více proměnných:** L'Hospitalovo pravidlo neexistuje pro funkce více proměnných! Lze ho použít **pouze** uvnitř dílčích výpočtů jedné proměnné (např. až po dosazení konkrétní křivky $y = k(x - x_0) + y_0$).

5 Spojitost funkce

Pojem spjitosti funkce dvou proměnných je zcela analogický jako u funkcí jedné proměnné. Platí stejné principy jako u funkcí jedné proměnné - tedy funkce je **spjitá** v bodě $[x_0, y_0]$ právě když je limita v tomto bodě rovna funkční hodnotě. Dále **součet, rozdíl, součin, podíl** (pokud jmenovatel $\neq 0$) a **složení spjitých funkcí je opět spjitá funkce**.

Příklad 1

Funkce $f(x, y) = x + y$ je spjitá v celé rovině \mathbb{R}^2 , protože funkce $z = x$ i funkce $z = y$ jsou spjité a jejich součtem vznikne opět spjitá funkce.

Příklad 2

Funkce $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+1}$ je spojitá v celé rovině \mathbb{R}^2 , protože jde o podíl dvou spojitých funkcí a jmenovatel je vždy nenulový ($x^2 + 1 \geq 1$).

Geometrická interpretace nespojitosti

1. **Skok:** Limita v bodě neexistuje (např. liší se při přiblížení z různých stran). Příkladem je funkce, která má na pravé polorovině hodnotu 1 a na levé 0:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

V bodech na ose y (kde se mění předpis) dochází ke skokové změně.

2. **Odstranitelná nespojitost:** Limita existuje, ale v daném bodě funkce není definována, nebo má hodnotu jinou než limitu (např. jeden izolovaný bod levitující nad plochou).