Cílové dovednosti

Po prostudování této kapitoly bude student schopen:

- **Rozlišit** mezi explicitním a implicitním zadáním funkce.
- **Ověřit** podmínky, za kterých rovnice $F(x, y) = 0$ definuje v okolí daného bodu implicitní funkci $y = f(x)$.
- **Vypočítat** první a druhou derivaci implicitní funkce.
- **Aplikovat** získané derivace pro vyšetření průběhu funkce (rovnice tečny, lokální extrémy, konvexnost a konkávnost).

1 Implicitní funkce

1.1 Motivace: Proč nestačí explicitní funkce?

Doposud jsme se setkávali převážně s funkcemi zadanými v tzv. **explicitním tvaru**, tedy jako $y = f(x)$. V praxi ale vztahy mezi veličinami často nevznikají takto přímočaře. Často dostáváme rovnici, kde jsou proměnné x a y navzájem provázané, například $x^2+y^2-1 = 0$, a z této rovnice nelze proměnnou y jednoznačně vyjádřit. Tento způsob zápisu se nazývá **implicitní funkce**. Jejím řešením obecně není funkce, ale křivka.

1.2 Kdy rovnice určuje funkci? (Příklady)

V této kapitole se budeme zabývat následujícím problémem: Máme zadánu funkci $F(x, y)$ dvou proměnných a hledáme množinu

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

Budeme studovat, jak tato množina vypadá. Konkrétně nás zajímá, za jakých předpokladů existuje funkce $y = f(x)$ taková, že $F(x, f(x)) = 0$. Tedy kdy lze jednu proměnnou vyjádřit jako funkci té druhé. Podívejme se nejprve na několik příkladů s rostoucí komplexností.

Příklad 1: Globální vyjádření je možné
Je-li $F(x, y) = y - 3x$, potom množina bodů vyhovující rovnici $F(x, y) = 0$ je právě množina všech bodů ležících na přímce $y = 3x$. Proměnnou y lze bez problémů explicitně vyjádřit pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2: Prázdná množina
Je-li $F(x, y) = (y-2)^2 + (x-1)^2 + 1$, pak rovnice $F(x, y) = 0$ nemá řešení, protože součet nezáporných čísel a jedničky nemůže být nikdy nula. Množina bodů je v tomto případě prázdná.

Příklad 3: Kružnice
Je-li $F(x, y) = (y - 1)^2 + (x + 1)^2 - 1$, potom rovnice $F(x, y) = 0$ představuje množinu všech bodů tvořících kružnici se středem v bodě $[-1, 1]$ a poloměrem 1. Zde už y globálně jako funkci x vyjádřit **nelze**. Pro jedno x dostaneme dvě různé hodnoty y (např. pro $x = -1$ dostaneme $y_1 = 0, y_2 = 2$). Takový vztah ale nepředstavuje funkci (každému x totiž smí odpovídat nejvýše jedno y).

Příklad 4: Dvě protínající se přímky
Je-li $F(x, y) = y^2 - x^2 = 0$, potom z rovnice $y^2 - x^2 = 0$ plyne $(y-x)(y+x) = 0$. Množinu řešení tvoří body ležící buď na přímce $y = x$, nebo na přímce $y = -x$. Opět zde pro $x \neq 0$ dostáváme dvě různé hodnoty y.

Příklad 5: Oblasti v rovině
Je-li $F(x, y) = \sqrt{y^2x^2} + xy = |xy| + xy = 0$, pak body splňující $F(x, y) = 0$ vyhovují rovnici $|xy| = -xy$. To nastane právě tehdy, když $xy \leq 0$. Výsledkem není křivka, ale celá plocha: sjednocení druhého a čtvrtého kvadrantu včetně os.

1.3 Základní pravidlo o existenci implicitní funkce

V předchozích příkladech (zejména 3, 4 a 5) nebylo možné vyjádřit y jako *globální* funkci proměnné x. Zúžíme proto náš problém na lokální pohled: vezmeme nějaký bod $A = [x_0, y_0]$, který leží na zkoumané křivce, a ptáme se, zda v jeho dostatečně malém okolí umíme y vyjádřit jednoznačně jako funkci x.

Platí následující **pravidlo**: Nechť je dána rovnice $F(x, y) = 0$ a bod $A = [x_0, y_0]$. Pokud platí, že:

1. $F(x_0, y_0) = 0$ (bod leží na křivce),
2. Funkce F má v okolí bodu A spojité všechny parciální derivace až do řádu $n \geq 1$,
3. **Klíčová podmínka:** $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

pak rovnice $F(x, y) = 0$ určuje v jistém okolí bodu A právě jednu spojitou funkci $y = f(x)$, pro kterou platí $f(x_0) = y_0$. **Navíc platí, že tato implicitně zadaná funkce má v daném okolí spojité derivace až do řádu n.**

Geometrický význam klíčové podmínky: Derivace $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ zaručuje, že křivka nemá v daném bodě svislou tečnu. Pokud by takovou tečnu měla (např. u kružnice na jejím levém a pravém okraji), funkce by se v tomto bodě vracela zpět a pro jedno x by existovaly dvě hodnoty y.

1.4 Derivace implicitní funkce

Pokud víme, že implicitní funkce $y = f(x)$ v okolí bodu existuje, můžeme zjišťovat její vlastnosti pomocí derivací. Nepotřebujeme k tomu znát její explicitní předpis!

Víme, že pro body na křivce platí identita:

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Tuto rovnici budeme derivovat podle x. Nesmíme ale zapomenout, že f je funkcí x, takže při derivování F podle druhé proměnné derivujeme **složenou funkci**.

1. Výpočet první derivace (f'):
Derivací identity $F(x, f(x)) = 0$ podle x dostaneme:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0.$$

Z toho (protože podle předpokladu je $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$) snadno vyjádříme f':

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

2. Výpočet druhé derivace (f''):
Druhou derivaci získáme tak, že první derivaci zderivujeme znovu podle x. Aplikujeme pravidlo pro derivaci součinu a opět pamatujeme na derivaci vnitřní funkce $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x)\right] = 0.$$

Po zderivování:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x)) \cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x)\right)\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, f(x)) \cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x)) \cdot f'(x)\right) f'(x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f''(x) = 0.\end{aligned}$$

Za předpokladu spojitosti smíšených derivací ($\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$) můžeme rovnici upravit a osamostatnit $f''(x)$:

$$f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x)) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x))f'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x))(f'(x))^2}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Poznámka pro praxi: Místo složitého vzorce pro druhou derivaci je často mnohem spolehlivější a jednodušší derivovat konkrétní zadanou rovnici přímo, krok za krokem, podle výše uvedeného postupu.

1.5 Příklad: Tečna a poloha křivky vůči tečně

Zadání: Určete rovnici tečny v bodě $A = [1, 1]$ ke křivce určené implicitní rovnicí $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$. Dále určete, zda křivka v okolí tohoto bodu leží nad tečnou, nebo pod ní.

Řešení: Nejprve ověříme předpoklady existence implicitní funkce v bodě $A = [1, 1]$:

1. Bod leží na křivce: $F(1, 1) = 1^3 + 1^3 - 2(1)(1) = 0$. Platí.
2. Funkce F je polynom, má tedy všude spojité parciální derivace všech řádů.
3. Klíčová podmínka (nenulová derivace podle y):

   $$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2x \implies \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 3(1)^2 - 2(1) = 1.$$

   Protože $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 1 \neq 0$, je klíčová podmínka splněna.

V jistém okolí bodu A tedy **existuje právě jedna implicitní funkce** $y = f(x)$, pro kterou platí $f(1) = 1$. Navíc víme, že tato funkce má spojité derivace, můžeme je tedy začít počítat. Nejprve dosadíme $y = f(x)$ do $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$:

$$x^3 + (f(x))^3 - 2xf(x) = 0$$

a následně vzniklou rovnici zderivujeme.

1. Výpočet první derivace (směrnice tečny):
Rovnici zderivujeme podle x. Pozor na derivaci $(f(x))^3$ (složená funkce) a $2xf(x)$ (součin):

$$3x^2 + 3(f(x))^2 \cdot f'(x) - 2\,(1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)) = 0.$$

Do této rovnice nyní dosadíme souřadnice zadaného bodu $x = 1$ a $f(1) = 1$:

$$3(1)^2 + 3(1)^2 \cdot f'(1) - 2\,(1 \cdot 1 + 1 \cdot f'(1)) = 3 + 3f'(1) - 2 - 2f'(1) = 0$$
$$\implies \quad 1 + f'(1) = 0 \quad \implies \quad \mathbf{f'(1) = -1}.$$

Rovnice tečny v bodě $[1, 1]$ má tvar $y - 1 = f'(1)(x - 1)$. Po úpravě dostáváme:

$$y - 1 = -1(x - 1) \quad \implies \quad \mathbf{y = -x + 2}.$$

2. Výpočet druhé derivace (konvexnost/konkávnost):
O poloze křivky vůči tečně rozhoduje znaménko druhé derivace $f''(1)$. Vezmeme zderivovanou rovnici z prvního kroku a zderivujeme ji **znovu podle** x:

$$\frac{d}{dx}\left[3x^2 + 3(f(x))^2 \cdot f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x)\right] = 0.$$

Dáváme opět pozor na pravidlo o derivaci součinu a složené funkce:

$$6x + \left[6f(x) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + 3(f(x))^2 \cdot f''(x)\right] - 2f'(x) - 2\,[1 \cdot f'(x) + x \cdot f''(x)] = 0.$$

Tento zdánlivě dlouhý výraz se okamžitě zjednoduší, jakmile dosadíme známé hodnoty: $x = 1$, $f(1) = 1$ a z předchozího kroku už víme, že $f'(1) = -1$:

$$6(1) + 6(1)(-1)(-1) + 3(1)^2 \cdot f''(1) - 2(-1) - 2\,[1 \cdot (-1) + 1 \cdot f''(1)] = 0$$
$$\implies \quad 6 + 6 + 3f''(1) + 2 - 2\,[-1 + f''(1)] = 0 \quad \implies \quad 14 + 3f''(1) + 2 - 2f''(1) = 0$$
$$\implies \quad 16 + f''(1) = 0 \quad \implies \quad \mathbf{f''(1) = -16}.$$

Poznámka: Stejný výsledek bychom dostali dosazením do vzorce pro druhou derivaci f''. Přímé derivování rovnice ale nevyžaduje znalosti vzorců.

Protože $f''(1) = -16 < 0$, funkce $f(x)$ je v bodě A **konkávní** a graf křivky zde leží **pod tečnou**.

1.6 Lokální extrémy implicitní funkce

Hledáme-li lokální extrémy funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, postupujeme takto:

1. **Nutná podmínka a existence implicitní funkce:** V bodě lokálního extrému musí mít funkce vodorovnou tečnu, tedy první derivace $f'(x)$ musí být rovna nule. Z rovnosti $f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = 0$ plyne, že čitatel musí být nulový. Podezřelé body tedy získáme řešením soustavy dvou rovnic:

   $$F(x, y) = 0 \quad \text{(bod leží na křivce)} \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \text{(tečna je vodorovná)}.$$

   U každého bodu $[x_0, y_0]$, který je řešením této soustavy, následně ověříme platnost podmínky $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, která zaručuje existenci funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

2. **Postačující podmínka: Za předpokladu, že** $f'(x_0) = 0$, se vzorec pro druhou derivaci radikálně zjednoduší (všechny členy obsahující $f'(x)$ jsou totiž nulové a z rovnice vypadnou) a tedy dostáváme:

$$f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Podle znaménka druhé derivace pak rozhodneme o typu extrému:

   - Je-li $f''(x_0) > 0$, jedná se o lokální **minimum** (funkce je konvexní, křivka leží **nad vodorovnou tečnou**).
   - Je-li $f''(x_0) < 0$, jedná se o lokální **maximum** (funkce je konkávní, křivka leží **pod vodorovnou tečnou**).

1.7 Příklad: Nalezení lokálních extrémů

Zadání: Najděte lokální extrémy funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí $F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$.

Řešení: Budeme předpokládat, že v okolí hledaných extrémů rovnice existuje implicitní funkce $y = f(x)$. Do zadané rovnice tedy dosadíme $f(x)$ a budeme ji přímo derivovat podle x:

$$x^2 - xf(x) + (f(x))^2 - 3 = 0.$$

1. První derivace a podezřelé body:
Zderivujeme rovnici podle x (opět pozor na derivaci součinu a složené funkce):

$$2x - [1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)] + 2f(x)f'(x) - 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x - f(x) - x\color{red}{f'(x)} + 2f(x)\color{red}{f'(x)} = 0.$$

Protože hledáme lokální extrémy, dostáváme z předchozí rovnice:

$$\color{red}{f'(x) = 0} \quad \Longrightarrow \quad 2x - f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = f(x) = 2x.$$

Tento vztah dosadíme zpět do původní rovnice křivky, abychom našli konkrétní body:

$$F(x, 2x) = x^2 - x(2x) + (2x)^2 - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 = 3 \Longrightarrow x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1.$$

Našli jsme dva kandidáty na lokální extrém: $A = [1, 2]$ a $B = [-1, -2]$.

2. Ověření existence implicitní funkce:
Abychom v těchto bodech mohli o funkci $f(x)$ vůbec mluvit, musíme ověřit klíčovou podmínku $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Spočítáme $\frac{\partial F}{\partial y} = -x + 2y$:

- V bodě A: $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 2) = -1 + 4 = 3 \neq 0$.
- V bodě B: $\frac{\partial F}{\partial y}(-1, -2) = 1 - 4 = -3 \neq 0$.

V obou bodech tedy implicitní funkce $f(x)$ existuje a má spojité derivace všech řádů, protože i funkce F je má.

3. Druhá derivace a určení typu extrému:
Vezmeme rovnici z prvního kroku (před dosazením nuly za $f'(x)$) a zderivujeme ji znovu podle x:

$$\frac{d}{dx}\left[2x - f(x) - xf'(x) + 2f(x)f'(x)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 2 - f'(x) - [1 \cdot f'(x) + x \cdot f''(x)] + 2\,[f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x)] = 0.$$

Vyhodnocení v bodě A=[1, 2]: Dosadíme $x = 1$, $f(1) = 2$ a $f'(1) = 0$:

$$2 - (1) \cdot f''(1) + 2(2) \cdot f''(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2 + 3f''(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f''(1) = -\frac{2}{3}}.$$

Druhá derivace je záporná, funkce je v tomto bodě konkávní a má zde **lokální maximum**.

Vyhodnocení v bodě B=[-1, -2]: Dosadíme $x = -1$, $f(-1) = -2$ a $f'(-1) = 0$:

$$2 - (-1) \cdot f''(-1) + 2(-2) \cdot f''(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2 - 3f''(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f''(-1) = \frac{2}{3}}.$$

Druhá derivace je kladná, funkce je v tomto bodě konvexní a má zde **lokální minimum**.